Práctico 7:

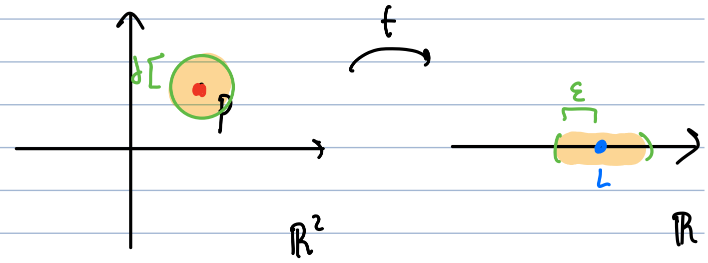
Tenemos $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^2$ $\left(p=(p_1,p_2)\right)$.

Entonces decimos que $\lim\limits_{(x,y)\to p} f(x,y)=L$ sii $\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ tq } \|(x,y)-(p_1,p_2)\|<\delta \Rightarrow \|f(x,y)-L\|\leq\varepsilon.}$

si y solo si

$(x,y)\in B(p,\delta)$.

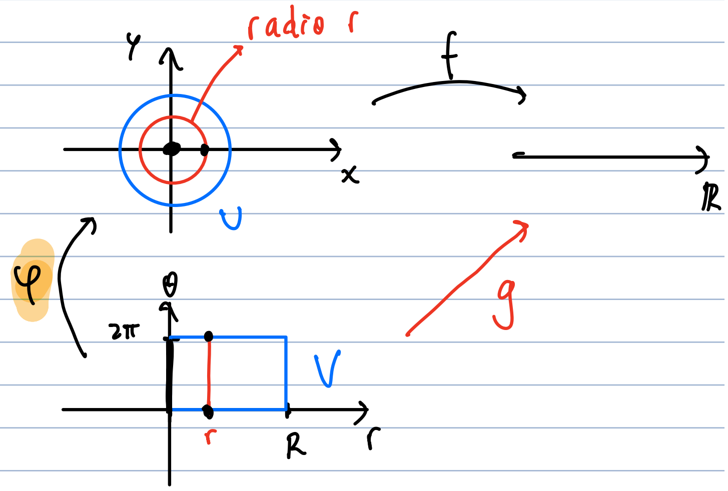
- Decimos que f es continua en p si $\lim\limits_{(x,y)\to p} f(x,y)=f(p)$.



4). $f: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $U=B^*\left((0,0),R\right)$.

$\varphi: V\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$

$V=(0,R)\times[0,2\pi)$



Definimos g como $f\circ\varphi=g$

es decir, $g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$.

<u>Obs</u>: fijando r, $\varphi(r,\theta)$ recorre una circunferencia de centro 0 y radio r.

a) Suponemos que $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L}$. Queremos ver que esto implica que

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tq $\underline{\forall r\in(0,\delta)}$, $\underline{\theta\in[0,2\pi)}$. $\|g(r,\theta)-L\|<\varepsilon$

(Definimos $g_\theta(r)=g(r,\theta)$ para θ fijo) *

esto se traduce en tener radio $r<\delta$.

definición es $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ tq $(x,y)\in B((0,0),\delta) \Rightarrow \|f(x,y)-L\|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ tq radio$(x,y)<\delta \Rightarrow \|f(x,y)-L\|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ tq $r<\delta$, $\theta\in[0,2\pi) \Rightarrow \|f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)-L\|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta$ tq $r\in(0,\delta)$, $\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \|g(r,\theta)-L\|<\varepsilon$.

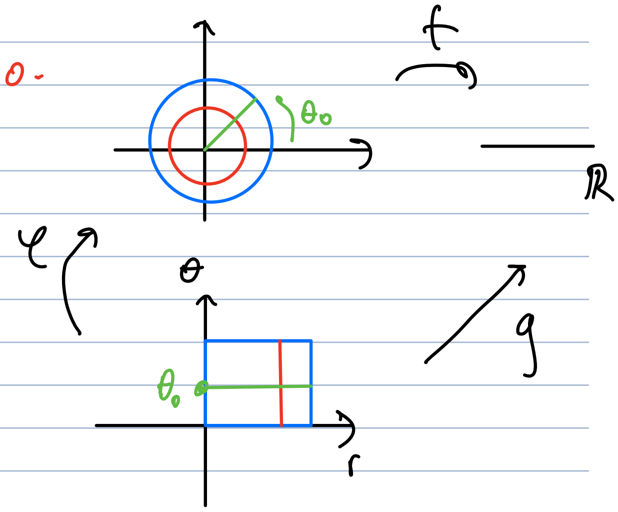
$*\ \lim_{r\to 0} g_\theta(r) = L \xrightarrow{\text{definición}} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta \text{ tq } r\in(0,\delta) \Rightarrow \| g_\theta(r) - L\| < \varepsilon.$

Por lo tanto, lo que está en amarillo significa $g_\theta(r) \longrightarrow L \ \forall \theta \in [0,2\pi)$
es decir, todos los límites direccionales existen y son el mismo.

b) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{r\to 0} g_\theta(r) = L \ \forall \theta \in [0,2\pi).$

Esto es exactamente lo que está escrito en rojo.

Reitero, $\lim_{r\to 0} g_\theta(r)$ es un límite direccional



$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$

c) i) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Pasando a polares obtenemos

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta.$$

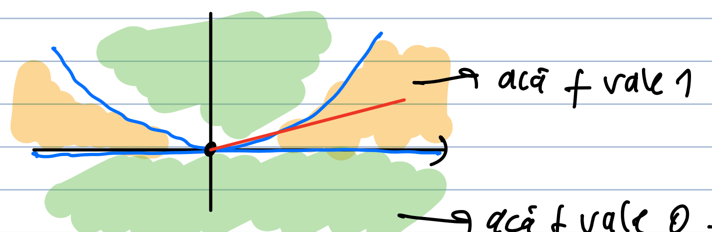
Con esto podemos decir, por parte a), que f no tiene límite en $(0,0)$.

Es lo mismo pero también podemos usar parte b): $g_\theta(r) = \cos(\theta)$ (cte para r)

donde $g_\theta(r) \to \cos(\theta)$

(no se verifica $g_\theta(r) \to L \ \forall \theta \in [0,2\pi)$).

iii). $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$



$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0< r\,\mathrm{sen}\,\theta < r^2\cos^2\theta \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

$$g(r,\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 < \sin\theta < r\cos^2\theta \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Afirmación: fijado θ, si r chico $g_\theta(r) = 0$.

Entonces $\forall\theta$, $g_\theta(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$.

Sin embargo f no tiene límite en $(0,0)$, simplemente por def de límite (no se verifica).

d) Probar que no vale el recíproco de b), es decir, si bien $g_\theta(r) \to L$ $\forall\theta$, puede no existir el límite de f.

(el contraejemplo es c) iii)).

e) Si justo $g(r,\theta) = h(r)\cdot K(\theta)$ donde K acotada y $h(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$

entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. (Jugar con la definición de límite)

f) i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ → en polares queda

$$\frac{r^3(\cos^2\theta\cdot\sin\theta)}{r^2} = \underbrace{r}_{h(r)}\cdot\underbrace{(\cos^2\theta\sin\theta)}_{K(\theta)}.$$

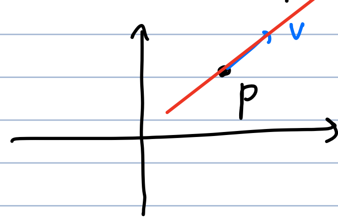
Por parte e, el límite buscado es 0.

Comentarios:

- Límites direccionales: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

  definimos límite direccional en p con dirección $v=(v_1,v_2)$ de f

  como $\lim_{t\to 0} f(p_1+tv_1, p_2+tv_2)$



- Si f tiene límite L en p, todos los límites direccionales dan L.
- el recíproco es falso: pueden coincidir (y existir) todos los lím direccionales pero no existir el límite de f.