Práct 2 (Ecuaciones)

- Ecuación dif es una ecuación donde la incógnita es una función y están implicadas sus derivadas

- Ejemplo : caída libre : $X(t)$ posición de un objeto.
$X'(t)$ velocidad
$X''(t)$ aceleración

ec. caída libre : $X''(t) = g$

↳ Para resolver : $\int x''(t)\,dt = \int g\,dt$

$x'(t) = gt + V_0$

Vuelvo a integrar

$$\boxed{X(t) = g\cdot\frac{t^2}{2} + V_0 \cdot t + X_0}$$

- Ejemplo : $X'(t) = f(t)$.

↳ Para resolver $X(t) = \int f(t) = F(t) + K$ (Teor. fund).

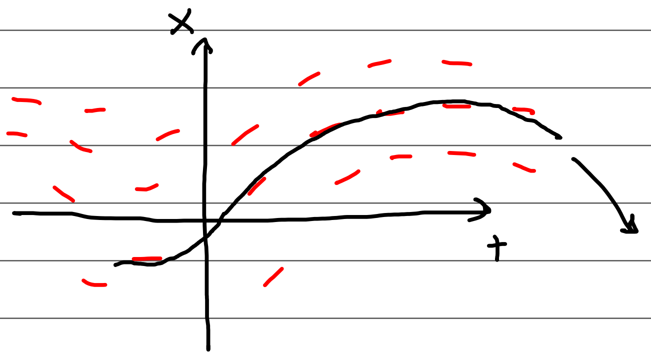
- Ejem : $X'(t) = X(t)$. → Soluc : $x(t) = c\cdot e^t$.

- Tipos de ecuaciones dif : (que trabajaremos hoy)
  - De variables separables : Son del estilo $X'(t) = A(t)\cdot B(x)$.
  - Lineales (de primer orden) : $X'(t) + a(t)\cdot x(t) = b(t)$

(Si $b(t) = 0$ decimos que la ec. es homogénea)

- Interpretación gráfica :

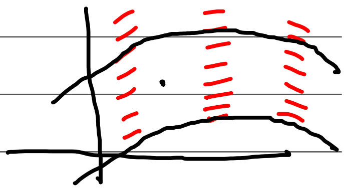
En gral ec. dif de primer orden se escribe así : $X'(t) = F(X,t)$



$F(x,t)$ me da una pendiente en cada pto (t,x)

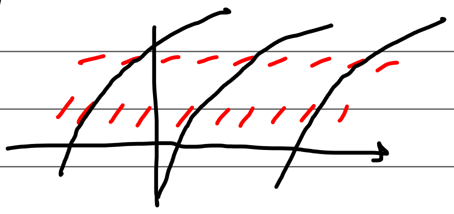
posible solución

- Si $F(t,x)$ no depende de x, tenemos $F(t,x_1) = F(t,x_2)$



- Si $F(t,x)$ no depende de t (ecuaciones autónomas)

↳



1) a) $y'(x) = y^2(x) - 1$ (función; param real) / En nuestra notación, sería $\left[x'(t) = x^2(t) - 1\right]$

o de forma compacta $x' = x^2 - 1$

- **obs** : Es de variables separables. $x'(t) = \underbrace{A(t)}_{=1} \cdot \underbrace{B(x)}_{x^2-1}$

- En A solo aparece t
- En B solo aparece $x(t)$

$$\int \frac{x'(t)\,dt}{B(x(t))} = \int A(t)\,dt \longrightarrow \int \frac{dx}{B(x)} = \int A(t)\,dt$$

$$x'(t)\,dt = dx$$

$$\left(\int \frac{u'(t)}{(u(t))^2 - 1}\,dt = \int \frac{du}{u^2 - 1} \quad \text{(cambio de variable c1)} \right)$$

En nuestro caso, $A = 1$, $B(x) = x^2 - 1$, tenemos $\boxed{\int \frac{1}{x^2-1}\,dx} = \int 1\,dt = \boxed{t + c}$.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{1}{(x+1)} = \int \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}$$

fracc. simples

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1| \right) = t + c.$$

$$\log\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = 2t + 2c. \rightsquigarrow \frac{|x-1|}{|x+1|} = e^{2t} \cdot e^{2c}$$

$$\longrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \pm e^{2t} \cdot e^{2c}$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{x+1} = e^{2t} \cdot K \xrightarrow{*} \underbrace{\boxed{\frac{x+1}{x+1}}}_{=1} - \frac{2}{x+1} = e^{2t} \cdot K.$$

$$1 - \frac{2}{x+1} = e^{2t} K \longrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{e^{2t} K - 1}{-2}$$

$$* \rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\rightarrow x + 1 = \frac{2}{1 - e^{2t} K}$$

$$\left[x(t) = \frac{2}{1 - e^{2t} K} - 1 \right] \quad \text{soluciones}$$

* **obs** : En nuestro caso $K = \pm e^{2c}$, es decir, un real $\neq 0$.
Pero si pongo $K = 0$ en la soluc. hallada, también obtengo solución que resulta cte. $\rightsquigarrow x(t) = 2 - 1 = 1$ cte.

[Cuando $B(x) = x^2 - 1$ es 0 $(x = \pm 1)$ tengo soluc. ctes $(x(t) = \pm 1)$]

2) b) Considerar $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ (en nuestra notación $u(t) = \frac{x(t)}{t}$)

- $\underbrace{(t+x)x' = t-x.}$

$u(t) = \frac{x(t)}{t}$, $u'(t) = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2}$

$\boxed{tu = x}$

$u' = \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{x'}{t} - \frac{tu}{t^2}$

$u' = \frac{x'}{t} - \frac{u}{t}$

$\boxed{u' \cdot t + u = x'}$

$$\downarrow$$

$tx' + x \cdot x' = t - x$

C.V

$t(u't+u) + tu \cdot (u't+u) = t - tu.$

$(u't+u) + u(u't+u) = 1-u.$

$(u't+u)(1+u) = 1-u$

$(u't+u) = \frac{1-u}{1+u}$

$$\left[u' = \underbrace{\left(\frac{1-u}{1+u} - u\right)}_{B(u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{A(t)} \right]$$ var. sep.