Ej 4 parcial 2020 2do semestre : Sabemos $\sum a_n < \infty$, $\boxed{a_n \geq 0}$.

¿Qué pasa con $\underbrace{\sum_{1}^{\infty} e^{a_n^2} - 1}_{a)}$ y $\underbrace{\sum \cos(a_n) \cdot \sin(a_n)}_{b)}$?

a) Como $e^{u} - 1 \sim u$ si $u \to 0$

y a_n sabemos que $a_n \to 0$ → $e^{u} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$

por lo tanto $e^{a_n^2} - 1 \sim a_n^2$.

$\sum e^{a_n^2} - 1 \sim \sum a_n^2$

Afirmación: $a_n^2 \leq a_n$ si $a_n \leq 1$

como $a_n \to 0$ (a partir de un N $a_n \leq 1$)

Por crit. comparación $\sum a_n^2 < \infty$.

- $e^{u} - 1 \sim u$. $(u \to 0)$
- $\log(1+u) \sim u$ $(u \to 0)$.
- $\operatorname{sen}(u) \sim u$ $(u \to 0)$

b)

- $a_n \to 0$.
- $\cos(a_n) \to 1$ $(\cos(a_n) \sim 1)$
- $\operatorname{sen}(a_n) \sim a_n$.

$\sum \cos(a_n) \operatorname{sen}(a_n) \sim \sum 1 \cdot a_n < \infty$.

$\operatorname{Sen}(u) \sim u$ si $u \to 0$

prueba

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{Sen}(u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\cos(u)}{1} = 1.$$

Comparación: $a_n \leq b_n$ si ambos positivos

si $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$.

En general $\sum a_n < \infty \Rightarrow \sum a_n^2 < \infty$. Prueba: Basta ver que $a_n^2 \leq a_n$ a partir de un momento

$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ldots a_n + \ldots < \infty$.

$\sum a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdot + \cdot \ldots a_n^2 + \ldots$

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\log\left(6+\frac{6}{n}\right)-\log\left(6+\frac{6}{n+2}\right)\right).$$

$$= \underbrace{\left(\log\left(6+\frac{6}{1}\right)-\cancel{\log\left(6+\frac{6}{3}\right)}\right)}_{a_1}+\underbrace{\left(\log\left(6+\frac{6}{2}\right)-\cancel{\log\left(6+\frac{6}{4}\right)}\right)}_{a_2}$$

$$+\underbrace{\left(\cancel{\log\left(6+\frac{6}{3}\right)}-\log\left(6+\frac{6}{5}\right)\right)}_{a_3}+\underbrace{\left(\cancel{\log\left(6+\frac{6}{4}\right)}-\log\left(6+\frac{6}{6}\right)\right)}_{a_4}+\cdots$$

Afirmación $\sum_{1}^{N}\left(\log\left(6+\frac{6}{n}\right)-\log\left(6+\frac{6}{n+2}\right)\right)=\log\left(6+\frac{6}{1}\right)+\log\left(6+\frac{6}{2}\right)$
$-\left(\log\left(6+\frac{6}{N+1}\right)+\log\left(6+\frac{6}{N+2}\right)\right)$

Luego $\sum_{1}^{\infty}\left(\log(\cdots)-\log(\cdots)\right)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{1}^{N}\left(\log(\cdots)-\log(\cdots)\right)$

$$=\lim_{N\to+\infty}\log(6+6)+\log(6+3)-\log\left(6+\frac{6}{N+1}\right)-\log\left(6+\frac{6}{N+2}\right)$$

$$=\log(12)+\log(9)-\log(6)-\log(6).$$

Si $b_n=\log\left(6+\frac{6}{n}\right)$, $\sum b_n-b_{n+2}=(b_1-\cancel{b_3})+(b_2-b_4)+(\cancel{b_3}-b_5)$

$$\sum_{1}^{N}a_n-a_{n+1}=a_1-a_{N+1}.$$

$$\longrightarrow \sum_{1}^{N}a_n-a_{n+2}=a_1+a_2-a_{N+1}-a_{N+2}$$

$$\sum_{1}^{N}a_n-a_{n+3}=a_1+a_2+a_3-a_{N+1}-a_{N+2}-a_{N+3}$$

$$\sum_{1}(-1)^n\cdot\underbrace{\frac{1}{n\log(n)}}_{a_n}\qquad\qquad (-1)^n\frac{1}{n\log(n)}$$

- ¿Converge? Respuesta sí ; Por criterio Leibnitz $\left(a_n\searrow 0\right)$.
- ¿Converge absolutamente? $\left(¿\text{Converge } \sum^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right|=\sum^{\infty}a_n\,?\right)$.

La convergencia absoluta se puede estudiar por crit. serie integral pues $|(-1)^n a_n| = a_n$ es de términos positivos y decrece a 0.

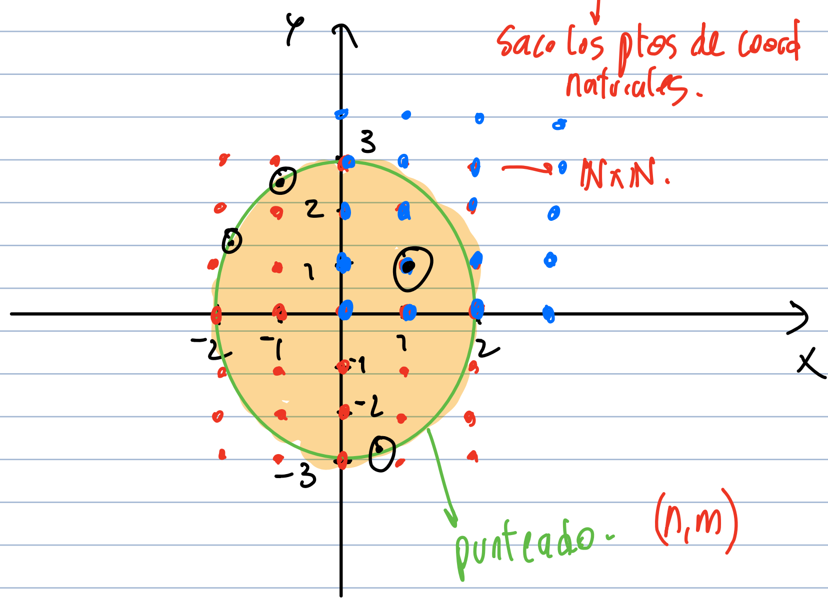
Luego $\sum a_n \sim \int f(x)$

$$A = \underbrace{\left\{ (x,y) : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 < 1 \right\}}_{\text{elipse (adentro)}} \cap (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^c$$

Saco los ptos de coord naturales.

Representar acum. de A que no son interiores.

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ borde elipse.



Si $x=0$, $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

$\frac{y}{3} = \pm 1$

Los ptos de acum. serán $A' =$ borde elipse $\cup$ ptos azules de adentro.

$$= \left\{ (x,y) : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \right\} \cup \left\{ (n,m) : \begin{array}{l} n = 0,1, \\ m = 0,1,2 \end{array} \right\}.$$

Conclusión: frontera y ptos acum. no interiores coinciden.

- Todos los ptos interiores son de acumulación.
- Todos los ptos exteriores no son de acumulación
- Afirmación: los ptos frontera o bien son aislados o de acumulación.

p es de acumulación de A si $\forall R > 0$ $B^*(p,R) \cap A \neq \emptyset$.

$a_n \geq 0$ $\quad 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2.$

Estudiar $\sum \frac{a_n}{n!}$ y $\sum \frac{a_n}{e^n}$

b_n $\quad c_n.$

I) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a_n} = \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \longrightarrow 0 = L$, por criterio cociente la serie converge.

$L < 1.$

II) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1}}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} e^1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{e}$

se verifica $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{e} < 1 - \varepsilon.$