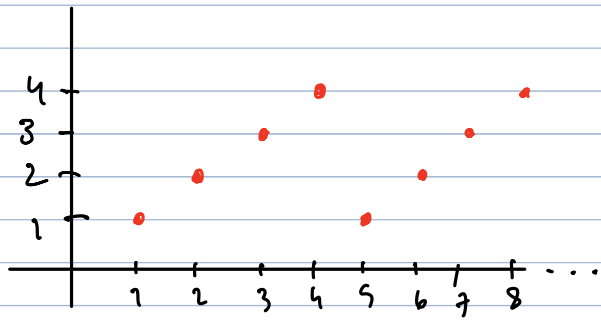
Seguimos con sucesiones (Pract 3):

6) Dada a_n sucesión real, decimos que $p \in \mathbb{R}$ pto aglomeración* si existe una subsucesión a_{n_k} tq $a_{n_k} \xrightarrow[k]{} p$.

* no confundir con pto acumulación.

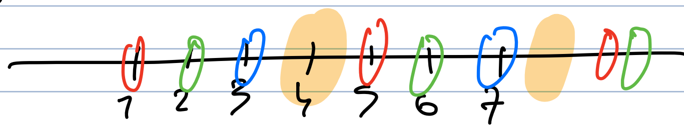
a) Queremos sucesión cuyos ptos de aglomeración sean exactamente $\{1,2,3,4\}$.



Siguiendo el gráfico de la sucesión que queremos:

$$\boxed{\begin{cases} a_{1+4n} = 1 \\ a_{2+4n} = 2 \\ a_{3+4n} = 3 \\ a_{4n} = 4. \end{cases}}$$

Todo k de la forma $4n$ o
$4n+1$ o
$4n+2$ o
$4n+3$



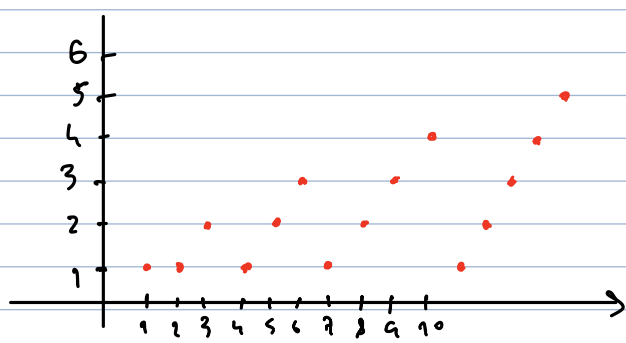
$1+4n \rightarrow$ un natural $\equiv 1 \bmod(4)$
$2+4n \rightarrow$ un natural $\equiv 2 \bmod(4)$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \bmod(4) \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 \bmod(4) \\ 3 & \text{si } n \equiv 3 \bmod(4) \\ 4 & \text{si } n \equiv 4 \bmod(4) \equiv 0 \bmod(4). \end{cases}$$

es lo mismo.

b) Queremos sucesión cuyos ptos de aglomeración sean todos los naturales

Si queremos repetir la idea del 6a), necesitamos una sucesión que pase infinitas veces por cada natural.



la sucesión que recorre a los naturales como el gráfico de la izq pasa por cada natural infinitas veces.

$a_1 = 1$ $a_4 = 1$
$a_2 = 1$ $a_5 = 2$
$a_3 = 2$ $a_6 = 3$

Otra forma: Todo natural se escribe de forma única como $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$

Recordamos que los primos son numerables, digamos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una enumeración que respeta el orden.

Luego defino $a_n = r_j$ donde j es el primer exponente no nulo que aparece en la descomposición.

Eg: Si $n = 2^0 3^2 5^7 7^0 11^0 13^1 \Rightarrow a_n = 2$.

Si $n = 2^0 3^0 5^6 7^0 \Rightarrow a_n = 6$.

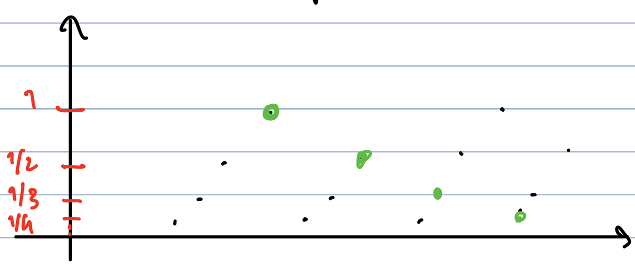
Pueden corroborar que esta sucesión pasa infinitas veces por cada natural.

(esto no es importante ☺).

c) ¿Existe sucesión cuyos ptos de aglom. sean exactamente $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

· Observar que si a_n es la sucesión de la parte b, $\frac{1}{a_n}$ aglomera en A.

La clave está en la palabra exactamente: necesariamente hay más ptos de aglomeración (el 0 será también de aglomeración).



↳ me puedo tomar subsucesión que tienda a 0:

a_{n_1} el primer término $= 1$.

a_{n_2} el sig. término $= 1/2$

Es decir, tomamos $a_{n_k} = \frac{1}{k}$ (se puede!).

9). Definimos por recurrencia $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$

a) $a_n \geq 0$ y $a_n \leq 3$. $(\forall n)$. (se prueba por inducción).

b) a_n decreciente $(a_{n+1} - a_n \leq 0)$.

↳ para probar esto primero ver expresión $a_{n+1} - a_n$.

Luego, probar lo que se pide es equiv. a probar $3 - a_n^2 \leq 0$ y esto se prueba por inducción.

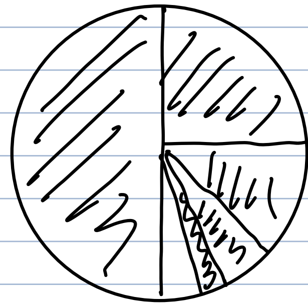
c) Tiene límite (an acotada y monótona).

¿Cómo lo calculo? $\quad$ Si $L = \lim a_n \Rightarrow L = \lim a_{n+1}$.

$$L = \lim_n a_{n+1} = \lim_n \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} = \frac{3(1+L)}{3+L}.$$

$$\Rightarrow L = \frac{3(1+L)}{3+L}.$$ (de acá se deduce L).

Series (práct 4):



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1.$

· Paradoja de Xenón

· Aquiles y la tortuga.

Una serie es "una suma infinita":

¿Cómo se formaliza?

↓ Queremos definir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definimos $S_N = \sum_{1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \dots + a_N$. → Sumas parciales.

y $\boxed{\sum_{1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N}$

• Primeros ejemplos: $\sum_{1}^{\infty} 1 = \infty$, $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ o en gral $\sum_{1}^{\infty} r^n < \infty$ con $r \in (0,1)$.

$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n$ oscila.

• Obs: Condición necesaria para que $\underset{a_n > 0.}{\sum_{}^{\infty} a_n} < \infty$ es que $a_n \to 0$

En los primeros ejercicios veremos series con $a_n > 0$.

1). $\sum_{0}^{\infty} r^n$ ¿Cómo se calcula? $\boxed{S_N = \frac{1-r^{N+1}}{1-r},}$ $\Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-r}, = \sum_{0}^{\infty} r^n.$

$\left(\sum_{0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \sum_{1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \right)$

$\sum_{K}^{\infty} r^n = \frac{r^K}{1-r}$

a). $\sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-1/3}$.

$\quad$ ↳ $r = 1/3$.

b) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} = \sum_{4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ → una forma $\frac{(1/\sqrt{3})^4}{1-1/\sqrt{3}}$

→ otra

c) $\sum_{1}^{\infty} 5^{n+1} = \infty.$

$\shortparallel$

$\sum_{2}^{\infty} 5^{n} = \infty.$

$a_n \to \infty$ ...!!

$$\sum_{4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3}$$

$$= \frac{1}{1-\sqrt{3}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3}$$