Ecuación del calor

Conservación de la energía
Ley conducción de Fourier $\Bigg\} \Rightarrow$

posición, tiempo: $u(x,t)$ = temperatura en tiempo t en la posición x (de una barra de longitud L)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Problema de Cauchy-Dirichlet:

Buscamos $u : \underbrace{[0,L]}_{\text{barra}} \times \underbrace{[0,+\infty)}_{\text{tiempo}} \longrightarrow \mathbb{R}$

1) u es continua en $[0,L]\times[0,+\infty)$

2) u es de clase C^2 en $(0,L)\times(0,+\infty)$

3) $u_t = u_{xx}$ en $(0,L)\times(0,+\infty)$

4) Condición inicial: $u(x,0) = u_0(x)$ $\forall\, x \in [0,L]$

5) Condición de borde: $u(0,t) = \theta_1(t)$ y $u(L,t) = \theta_2(t)$ $\forall\, t \geq 0$

Problema de Cauchy-Neumann:

1) 2) 3) 4) son iguales

Cambia 5) por 5') Condición de borde que controla el gradiente de temperatura en los extremos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \theta_1(t) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \theta_2(t)$$

Observación: se puede cambiar la condición inicial 4) por una del tipo 4') $u(x(s),t(s)) = \theta(s)$ para una o varias curvas $s \mapsto (x(s),t(s))$

Condiciones de borde nulas: $u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$

SOLUCIÓN POR VARIABLES SEPARABLES

Buscamos $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

solo depende de x $\rightarrow$ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)}$ $\leftarrow$ solo depende de t

$\Rightarrow$ $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ constante / $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \dfrac{T'(t)}{T(t)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' = \lambda X \\ T' = \lambda T \end{cases} \qquad \boxed{T(t) = c\,e^{\lambda t}}$$

$X'' = \lambda X$ ec. lineal homogénea 2do orden

polinomio característico $p(x) = x^2 - \lambda$

$\to \lambda > 0$ $\sqrt{\lambda}$, $-\sqrt{\lambda}$

$\to \lambda = 0$ raíz doble 0

$\to \lambda < 0$ raíces complejas

$$X(x) = \begin{cases} a e^{\sqrt{\lambda} x} + b e^{-\sqrt{\lambda} x} & \lambda > 0 \\ a + bx & \lambda = 0 \\ a \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + b \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x) & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$T(t) = c e^{\lambda t}$$

siendo a, b y c constantes.

<u>Condición de borde nula</u>: $u(0,t) = 0$ $\quad X(0)T(t) = 0$

$u(L,t) = 0$ $\quad X(L)T(t) = 0$

$T(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = 0 \quad \forall x, \forall t$ solución trivial.

Si $T(t) \neq 0$ para algún $t \Rightarrow \underbrace{X(0) = X(L) = 0}$

$$\Downarrow$$

$$X(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$$X(0) = a \overbrace{\cos(0)}^{1} + b\,\cancel{\mathrm{sen}(0)}^{0} = a = 0 \Rightarrow X(x) = b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$$X(L) = b\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{-\lambda}\, L\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\, L = k\pi \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{k\pi}{L}$$

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

Llegamos a: $u(x,t) = X(x)T(t) = \underbrace{(cb)}_{B} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$$\boxed{u(x,t) = B\, e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Condición inicial: $u_0(x) = u(x,0) = B \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

Es decir, encontramos una solución para:

$$\left|\begin{array}{l} 1)\ u_t = u_{xx} \\ 2)\ u_0(x) = B \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ 3)\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{array}\right|$$

Principio de superposición

u_1 y u_2 soluciones a $u_t = u_{xx}$ con condición de borde nula y condición inicial u_{01} y u_{02} resp.

$\Rightarrow$ $v = u_1 + u_2$ es solución de $u_t = u_{xx}$ con condición de borde nula y condición inicial $u_{01} + u_{02}$.

Ejemplo: $u_{01}(x) = 3 \operatorname{sen}(4x)$, $u_{02}(x) = -5 \operatorname{sen}(2x)$

$L = \pi$ $\quad u_1(x,t) = 3e^{-16t} \operatorname{sen}(4x)$ $\quad u_2(x) = -5e^{-4t} \operatorname{sen}(2x)$

$k = 2$

$\frac{k\pi}{L} = 4$, $k = 4$ $\quad u_0(x) = 3 \operatorname{sen}(4x) - 5 \operatorname{sen}(2x)$

$u(x,t) = 3e^{-16t} \operatorname{sen}(4x) - 5e^{-4t} \operatorname{sen}(2x)$

TEOREMA: Supongamos que $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión t.q. $\sum |b_k| < +\infty$

Entonces la superposición $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

es una solución al problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor con condición de borde nula y condición inicial $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$.

DEM: Veamos primero que $u(x,t)$ está bien definida y es continua.

Usando el criterio de la mayorante: $\left| b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right| \leq |b_k|$.

Las derivadas de cada término son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right) = -b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right) = -b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Para $t \geq \delta$

$$\left| -b_k\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right| \leq (cte)\, k^2 |b_k| e^{-(cte)k^2\delta} \leq |b_k|$$

para $k \geq k_0(\delta)$

también converge

$\Rightarrow$ u es de clase C^2 y $u_t = u_{xx}$.

Condición de borde:

$$u(0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)} = 0 \quad \forall t$$

$$u(L,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cancelto{0}{\operatorname{sen}(k\pi)} = 0$$

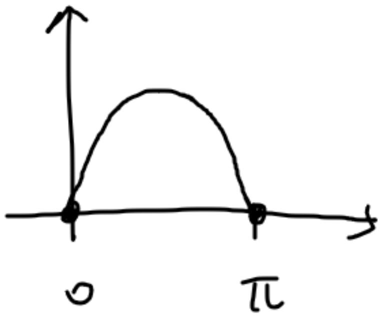
Condición inicial

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cancelto{1}{e^{0}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = u_0(x) \qquad \#$$

Ejemplo: Resolver

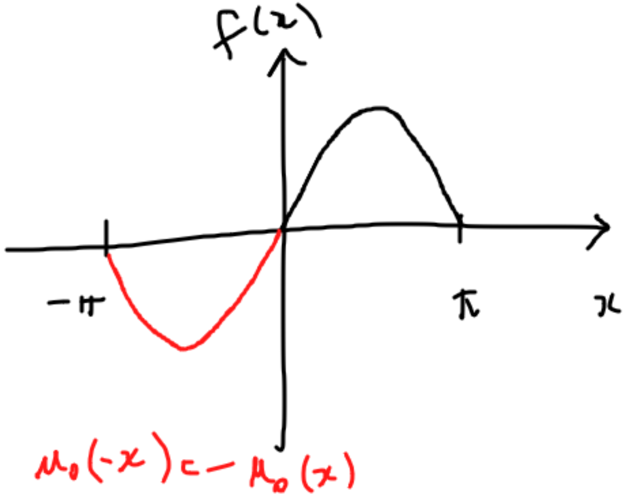
$L = \pi$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \underbrace{x(\pi - x)}_{u_0(x)} \quad x \in [0,\pi] \end{cases}$$



Tengo que expresar $u_0(x)$ como suma de senos, y luego usar el teorema.

Para que en la seie de Fourier quedan solo senos hacemos la extensión impar.



f(x) la extensión impar 2π-periódica de $u_0(x)$.

Calculamos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = 0\,, \quad a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\,\text{sen}(kx)}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x(\pi-x)}_{\substack{D\\ \pi-2x}}\,\underbrace{\text{sen}(kx)}_{I}\,dx$$

$$= \cancel{-\frac{2}{\pi}\,x(\pi-x)\,\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi}}^{\;\to\, 0} + \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(kx)\,dx$$

$$\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \underbrace{(\pi-2x)}_{D}\underbrace{\cos(kx)}_{I}\,dx = \cancel{\frac{2}{\pi k^2}(\pi-2x)\operatorname{sen}(kx)}\Big|_0^\pi \to 0$$

$$+\frac{4}{\pi k^2}\int_0^\pi \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{4}{\pi k^3}\cos(kx)\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{4}{\pi k^3}\left[\cos(k\pi)-1\right] = \overbrace{\frac{4(1-(-1)^k)}{\pi k^3} = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{8}{\pi k^3} & k \text{ impar}\end{cases}}^{b_k}$$

$\sum |b_k| = \sum_{k \text{ impar}} \frac{8}{\pi k^3} < +\infty$ Estoy en las hipótesis del teorema.

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k \text{ impar}} \frac{8}{\pi k^3} e^{-k^2 t} \operatorname{sen}(kx)}$$

Condiciones de borde constantes: $\left[\begin{array}{l} u(0,t) = A \\ u(L,t) = B \end{array}\right.$ constantes

Solución estacionaria: $u(x,t) = X(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 = X''(x) \Rightarrow X(x) = a + bx$$

$$X(0) = a = A \Rightarrow \boxed{a = A}$$

$$X(L) = A + bL = B \Rightarrow \boxed{b = \frac{B-A}{L}}$$

$$\boxed{X(x) = A + \frac{B-A}{L}x}$$

$$v(x,t) = \underbrace{u(x,t)}_{\text{solución borde constante}} - u_e(x) \qquad v = u - u_e$$

es solución a la ecuación del calor por linealidad.

$$v(0,t) = \overbrace{u(0,t)}^{A} - \overbrace{u_e(0)}^{A} = 0$$

$$v(L,t) = \underbrace{u(L,t)}_{B} - \underbrace{u_e(L)}_{B} = 0$$

Y tiene condición de borde nula.

CONDICIÓN INICIAL

$$\underbrace{u(x,0)}_{u_0(x)} = v(x,0) + u_e(x)$$

$$\underbrace{u(x,t)}_{\text{sol. borde cte}} = \underbrace{v(x,t)}_{\text{sol. borde nulo}} + \underbrace{u_e(x)}_{\text{sol. est.}}$$

RESUMEN: Para resolver la ec. del calor con borde constante y condición inicial u_0 busco una solución de la forma

$$u(x,t) = v(x,t) + u_e(x)$$

en donde u_e solución estacionaria y $v(x,t)$ es solución con borde nulo y condición inicial $u_0(x) - u_e(x)$.