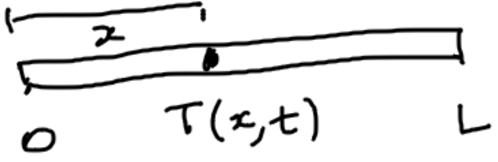
ECUACIÓN DEL CALOR:

(para una barra)

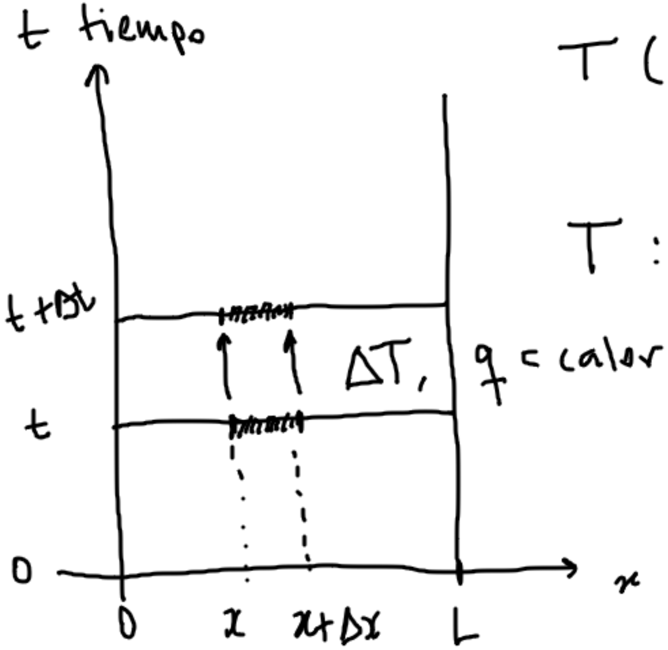


barra de longitu L

lo identificamos con el segmento $[0,L]$.

(no hay interacción con otros objetos y suponemos un mundo 1-D)

Suponemos que solo hay intercambio de energía por calor

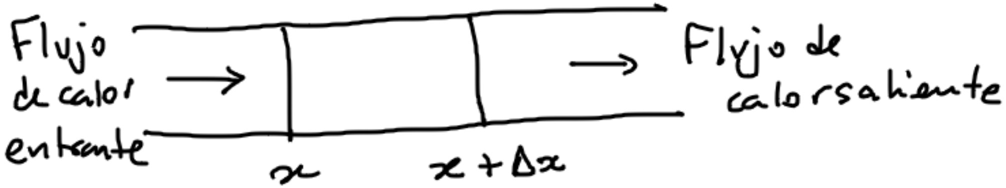


$T(x,t)$ = la temperatura de la barra en el tiempo t y en la posición x.

$$T : [0,L] \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

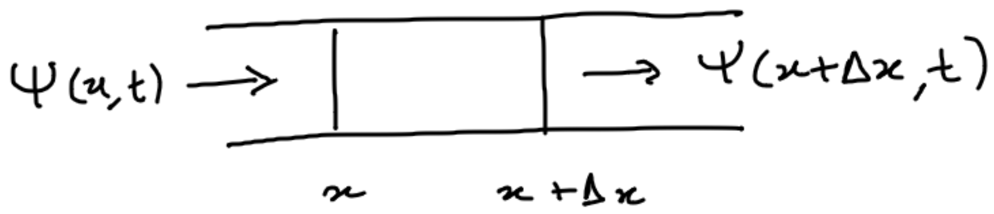
calor específico $= c = \dfrac{q}{\Delta T \Delta x}$

$$q = c\, \Delta T \Delta x$$



Flujo de calor = Energía térmica por unidad de tiempo

$$= \Psi(x,t)$$



Por conservación de la energía: $q = \left[\Psi(x,t) - \Psi(x+\Delta x,t)\right]\Delta t$

En resumen $c\,\Delta T\,\Delta x = q = \left[\Psi(x,t) - \Psi(x+\Delta x,t)\right]\Delta t$

LEY DE CONDUCCIÓN DE FOURIER: Flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura.

$$\boxed{\Psi(x,t) = -k\,\frac{\partial T}{\partial x}}$$

$$c\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\Psi(x,t) - \Psi(x+\Delta x,t)}{\Delta x}$$

Haciendo $\Delta t, \Delta x \to 0$

$$\left. \begin{aligned} c\frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \psi &= -k\frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \boxed{c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

ECUACIÓN DEL CALOR

Calor específico

Conductividad térmica.

$t' = \frac{k}{c} t$ cambio de escala en el tiempo

$$\frac{\Delta T}{\Delta t'} = \frac{\Delta T}{\frac{k}{c}\Delta t} = \frac{c}{k}\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{c}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{k}\left[\frac{k}{c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \boxed{u_t = u_{xx}}$$

En el curso: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ NOTACIÓN!

$u_t = \partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$

$u_{xx} = \partial^2_{xx} u = \partial^2 u / \partial x^2$

PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET para la ecuación del calor

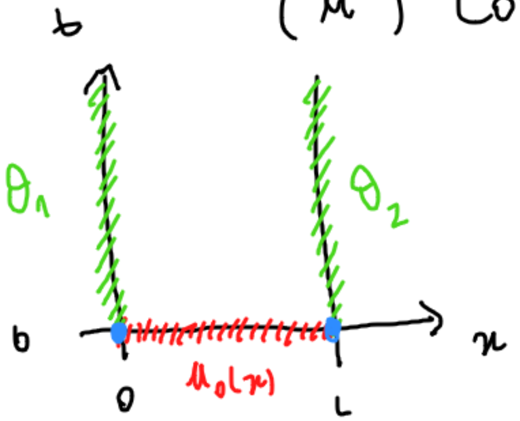
Queremos resolver (*) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es decir

encontrar una función $u : [0,L]\times[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) u es de clase C^2 y satisface (*) en el dominio abierto $(0,L)\times(0,+\infty)$.

(ii) Condición inicial: es la distribución inicial de temperatura en la barra

$$u(x,0) = u_0(x)$$



(iii) Condición de borde: qué pasa en los bordes de la barra.

$$u(0,t) = \theta_1(t)$$
$$u(L,t) = \theta_2(t)$$

COMPATIBILIDAD: $u_0(0) = \theta_1(0)$
$u_0(L) = \theta_2(0)$

Condición de borde nula: $\theta_1(t) = 0$ $\quad\forall t\quad$ $u(0,t) = 0$

$\theta_2(t) = 0$ $\quad\quad u(L,t) = 0$

El plan va a ser: resolver $(*)$ para la condición de borde nula usando 2 cosas:

1) El método de variables separables: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

2) El principio de superposición (la ecuación es lineal) para poder usar Fourier ($u_0(x)$ suma de senos)