Convergencia puntual de la serie de Fourier:

TEOREMA DE DINI: Sea f continua a trozos y 2π-periódica.

Supongamos que los límites:

$$L^+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

existen $\forall x$

$$L^- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}$$

Recordar la notación:

$$f(x^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h)$$

$$f(x^-) = \lim_{h \to 0^-} f(x+h)$$

Entonces $S_n(f)$ converge puntualmente y el límite es

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

<u>Corolario</u>: Si f además es continua: $S_n(f)$ converge puntualmente a f.

<u>Convergencia uniforme de la serie de Fourier</u>:

Vamos a usar el <u>criterio de la mayorante</u>:

$\{f_n : M \to \mathbb{R}\}$ sucesión de funciones tales que existe $\{A_n\}$ números reales con $|f_n(x)| \leq A_n \; \forall x \in M$ y $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty \Rightarrow S_n = \sum_{m=1}^{n} f_m$ converge uniformemente.

Propiedad: Sea f continua (en las hipótesis de Dini) y 2π-periódica, y sean a_0, $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sus coeficientes de Fourier.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$ entonces $\{S_n(f)\}$ la sucesión de series de Fourier parciales de f converge uniformemente a f.

Dem: Por el Teorema de Dini sabemos que $S_n(f) \xrightarrow{c.p.} f$.

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen}(kx)$$

$f_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$, $|f_k(x)| \leq |a_k| + |b_k|$

$\Rightarrow$ por el criterio de la mayorante $S_n(f)$ converge uniformemente. #

Recordar: la IGUALDAD DE PARSEVAL

f continua a trozos y 2π-periódica $\Rightarrow$ $\|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

En particular:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 < +\infty.}$$

Observar: $a_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ y $b_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

COEFICIENTES DE FOURIER DE LA DERIVADA

f continua, 2π-periódica con derivada continua a trozos.

$a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ coeficientes de Fourier de f

$a_0(f')$, $a_k(f')$, $b_k(f')$ coeficientes de Fourier de f'

f es 2π-periódica

$$a_0(f') = \langle f', 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[f(\pi) - f(-\pi) \right] = 0$$

$$\pi = -\pi + 2\pi$$

$$\boxed{a_0(f') = 0}$$

$$a_k(f') = \langle f', \cos(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{I} \, \underbrace{\cos(kx)}_{D} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \overbrace{\frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{sen}(kx) \, dx}^{b_k(f)}$$

0

$$= \frac{1}{\pi} \left[f(\pi)\cos(k\pi) - f(-\pi) \underbrace{\cos(-k\pi)}_{\cos(k\pi)} \right] + k \, b_k(f)$$

$$\boxed{a_k(f') = k \, b_k(f)}$$

$$b_k(f') = \langle f', \operatorname{sen}(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{I} \underbrace{\operatorname{sen}(kx)}_{D} \, dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{k}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx}_{a_k(f)}$$

$$\boxed{b_k(f') = -k a_k(f)}$$

CONCLUSIÓN:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0(f') &= 0 \\ a_k(f') &= k\, b_k(f) \\ b_k(f') &= -k\, a_k(f) \end{aligned}}$$

Observación: Si f continua, 2π-periódica con derivada continua a trozos

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f')^2 + b_k(f')^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k(f)^2 + k^2 b_k(f)^2 < +\infty$$

Observación: Sea $\{q_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 < +\infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q_n|}{n} < +\infty$.

serie conv.

DEM: $\left(|q_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = q_n^2 - 2\frac{|q_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(q_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \geq \frac{|q_n|}{n}$ #

TEOREMA: Sea f continua, 2π-periódica con derivada continua a trozos.

Entonces $S_n(f)$ converge uniformemente a f.

DEM: Tenemos:

- $$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}$$

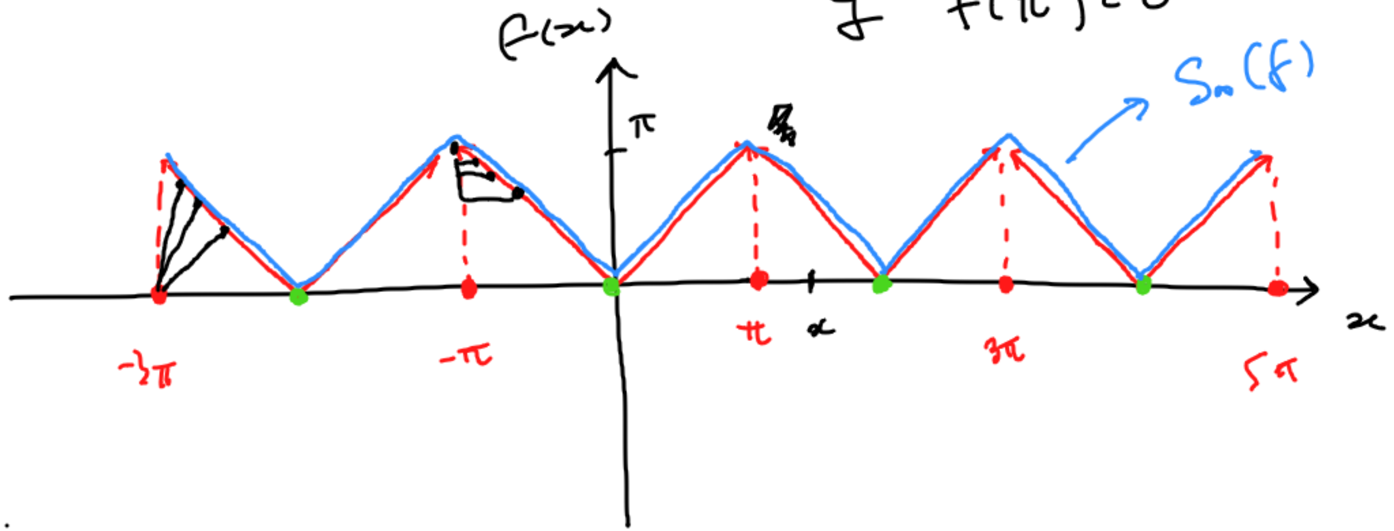
- $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(f')^2 + b_k(f')^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)| < +\infty$$

$\Rightarrow$ $S_n(f)$ conv. unif. #

Ejemplos Sea f 2π-periódica $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$

y $f(\pi) = 0$



¿TEO. DINI? Si

¿$S_n(f)$ conv. punt.? Si ¿a qué? Si $x \neq k\pi$ con k impar

$$S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

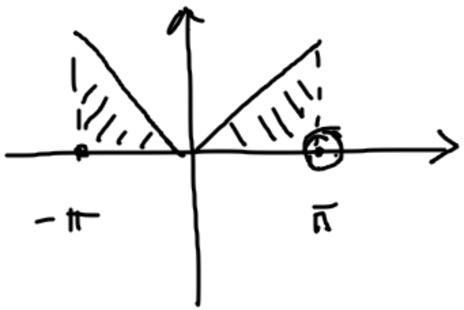
$x = k\pi$ k impar $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \dfrac{\pi+\pi}{2} = \pi$

¿Conv. uniforme? NO. $S_n(f)$ son continuas.

Coeficientes de Fourier:

función par

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx$$



$$= \frac{1}{\pi}\, x^2 \Big|_{0}^{\pi} = \pi \qquad \boxed{a_0 = \pi}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi k^2} & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \overset{D}{x}\,\overset{I}{\cos(kx)}\,dx$$

$$= \cancelto{0}{\frac{2}{\pi}\, x\, \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\Big|_{0}^{\pi}} - \frac{2}{\pi k}\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\, \frac{\cos(kx)}{k^2}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) \qquad \boxed{a_k = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right)}$$

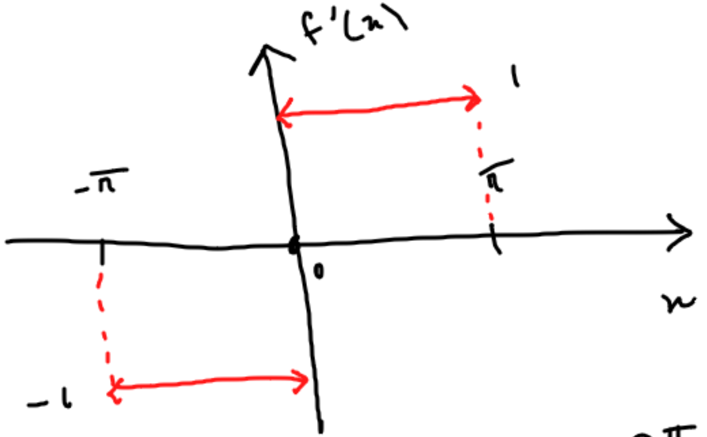
$b_k = 0$

Resumen: $a_0 = \pi$, $b_k = 0$, $a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| = \sum_{k \text{ impar}} \frac{4}{\pi k^2} < +\infty$$

(C.N) $\Longrightarrow$ $S_n(f)$ converge unif. (pero no a la función $\underline{\underline{f}}$)

$f'(x)$



$a_0(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$

$a_k(f') = 0$

$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right)$

$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$

Usando la conv. puntual para calcular series:

$$a_0 = \pi \quad a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \dfrac{-4}{\pi k^2} & k \text{ impar} \quad k = 2i+1 \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$$x = \pi \quad \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2i+1)^2} \overbrace{\cos((2i+1)\pi)}^{(-1)^{2i+1} = -1} = \frac{\overbrace{f(\pi^+)}^{\pi} + \overbrace{f(\pi^-)}^{\pi}}{2} = \pi$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

2L - periódicas: $\quad f(x+2L) = f(x)$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, g(x)\, dx$$

La "base" ortonormal: $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right), \ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$$S_\infty(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{L}x\right)$$

$a_0 = \langle f, 1 \rangle \qquad a_k = \langle f, \cos\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \rangle \qquad b_k = \langle f, \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{L}x\right) \rangle$