Condición de Cauchy:

Repaso: $\{x_n\}$ sucesión de números reales es de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \;/\; \text{si } n \geq n_0,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon$$

Idea: los "saltos" tienden a cero cuando $n \to +\infty$.

Completitud: $\{x_n\}$ es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy.

Sirve en la práctica para probar que una sucesión es convergente sin necesidad de calcular su límite.

Aplicación frecuente: para probar que una serie converge.

Una serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente

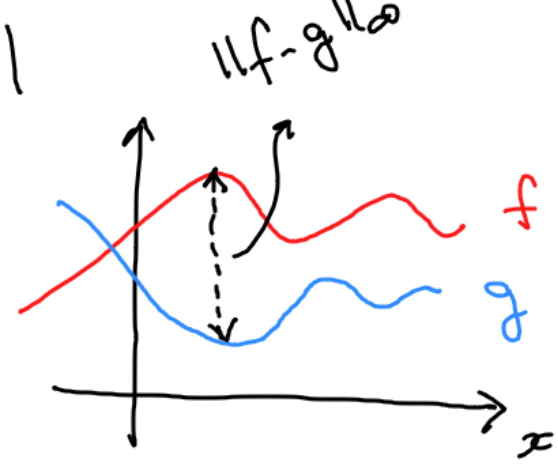
si la sucesión $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es convergente.

Observar: $|x_{n+k} - x_n| = \left| \sum_{m=n+1}^{m=n+k} a_m \right|$ es más fácil

probar que tiende a cero que calcular el valor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

La condición de Cauchy para sucesiones de funciones usa la norma infinito: $f, g : M \to \mathbb{R}$

$$\| f - g \|_\infty = \sup_{x \in M} | f(x) - g(x) |$$



DEF: Una sucesión de funciones $\{ f_n : M \to \mathbb{R} \}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow \| f_{n+k} - f_n \|_\infty < \varepsilon$.

Teorema 0.6: $\{ f_n \}$ converge unif. $\iff$ es de Cauchy.

Criterio de la mayorante (series de funciones)

Estamos interesados en la convergencia uniforme de una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$: es decir queremos saber si las sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ convergen uniformemente.

Supongamos que cada $f_k : M \to \mathbb{R}$ y que

$$|f_k(x)| \leq A_k \quad \forall x \in M$$

con $\{A_k\}$ una sucesión de números reales t.q $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{converge uniformemente.}$$

DEM: $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ como $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge $\Rightarrow \{B_n\}$ es de Cauchy.

Por otro lado:

$$\left| S_{n+k}(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{m=n+1}^{m=n+k} f_m(x) \right|$$

$$\leq \sum_{m=n+1}^{n+k} \underbrace{|f_m(x)|}_{\leq A_m} \leq \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m = B_{n+k} - B_n$$

$\Rightarrow$ $S_n(x)$ es de Cauchy como sucesión de funciones. #

Ejemplo:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(nx)}^{f_n(x)}}{n^2} \qquad |f_n(x)| \leq A_n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n < +\infty.$$

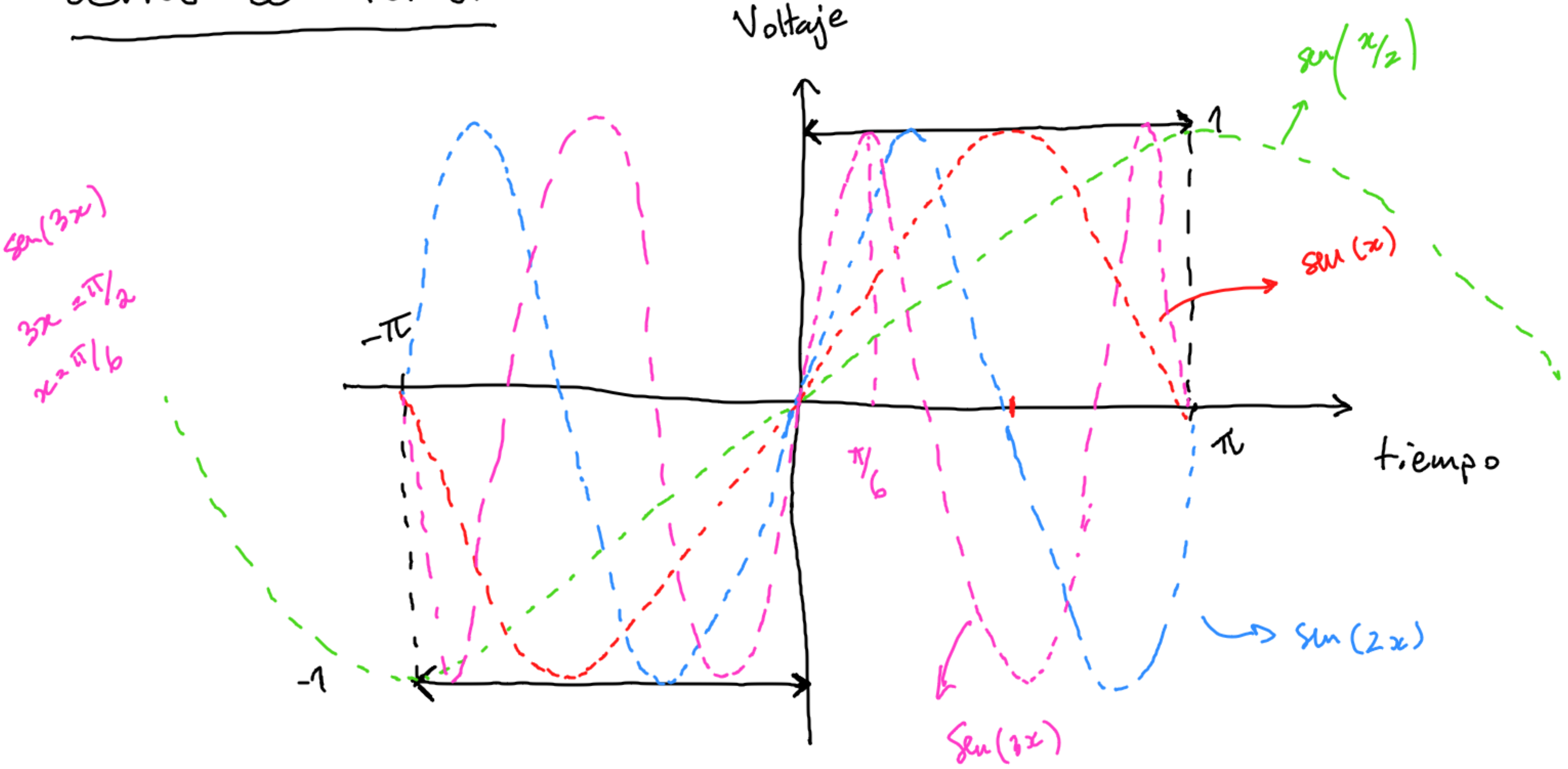
$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right| = \frac{\overbrace{|\operatorname{sen}(nx)|}^{\leq 1}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

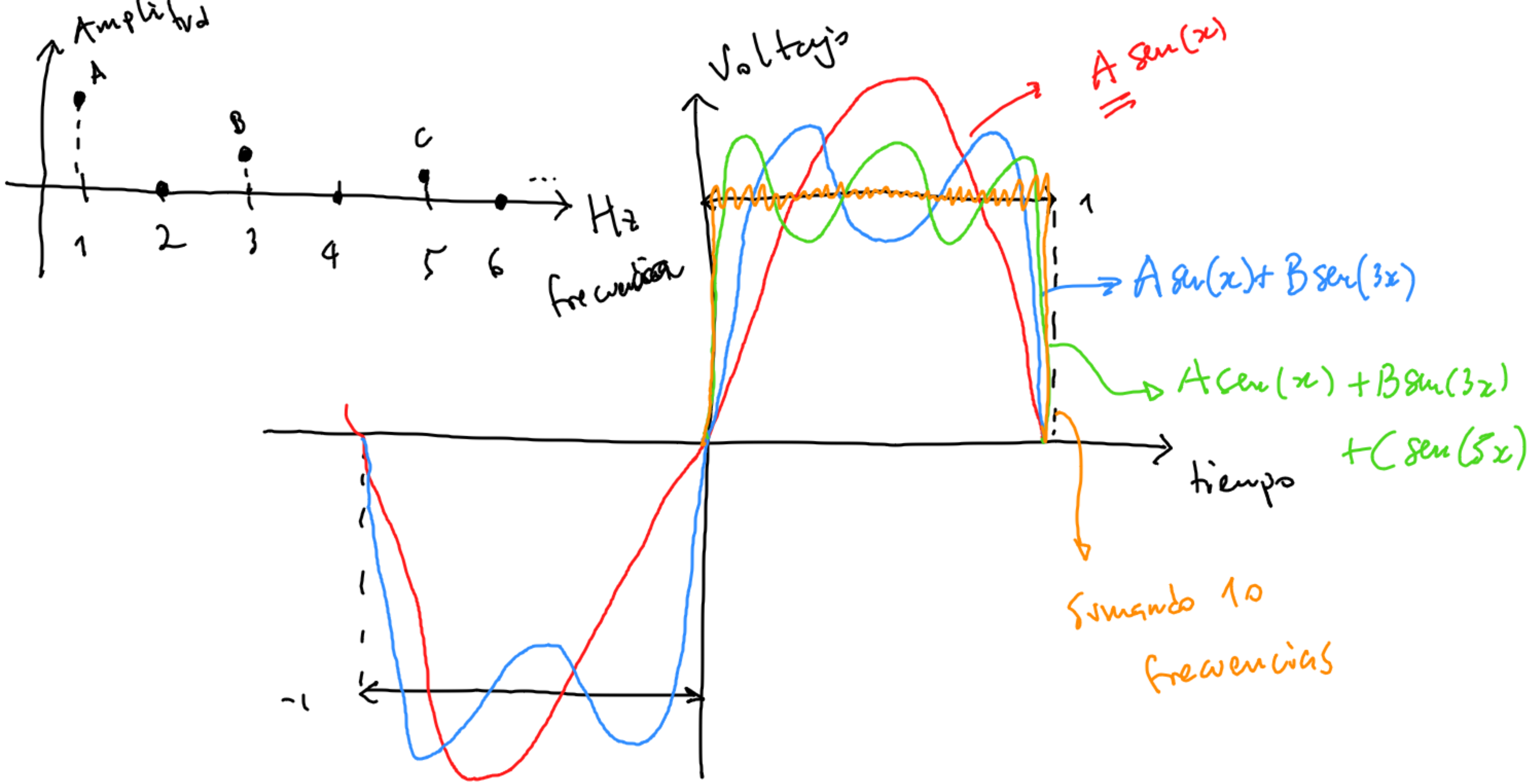
$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge uniformemente.

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2} \qquad \frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2} = A_n$$

$\Rightarrow$ conv. unif.

Series de Fourier





Amplitud
A
B
C
1
2
3
4
5
6
Hz
frecuencia
Voltaje
A sen(x)
A sen(x)+B sen(3x)
A sen(x) + B sen(3x)
+ C sen(5x)
tiempo
Sumando 10
frecuencias
1
-1

Repaso: espacios vectoriales con producto interno

V espacio vectorial $\langle \cdot , \cdot \rangle$ producto interno (escalar)

$\varphi, \psi, \ldots$ son vectores de V

<u>Conjunto ortonormal:</u>

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ t.q.

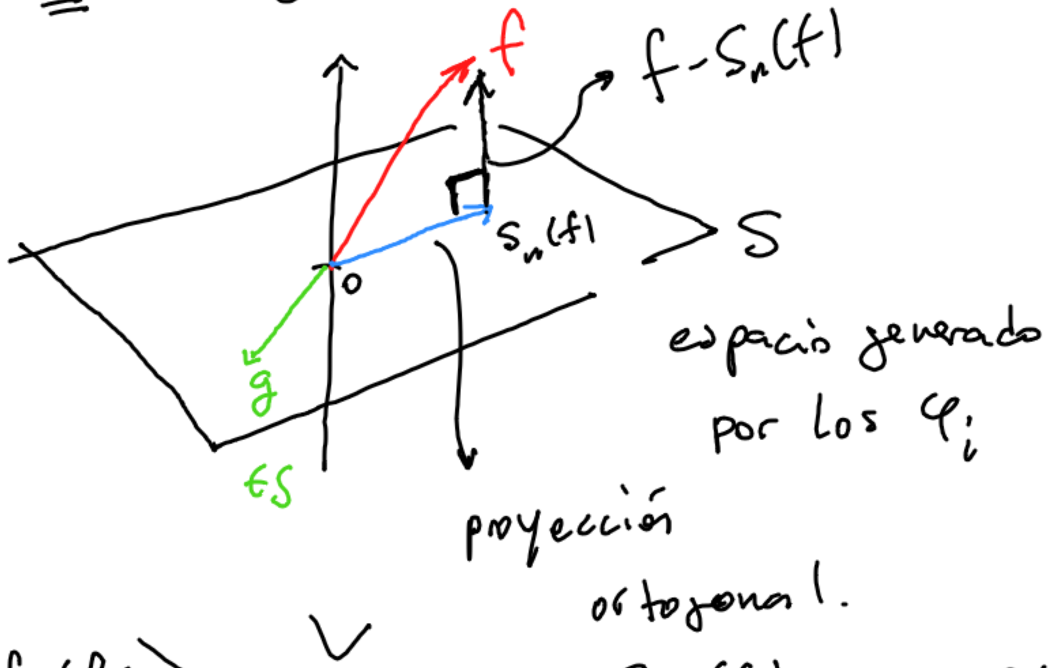
$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ $\quad \|\varphi_i\| = 1 \; \forall i$

- $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$
- $\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2, \psi \rangle = c_1 \langle \varphi_1, \psi \rangle + c_2 \langle \varphi_2, \psi \rangle$
- $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ y $= 0$ solo si $\varphi = 0$

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle$$

Proyección ortogonal: $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ conjunto ortonormal



$f\in V$

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i$$

Prop: $f-S_n(f)\perp S$

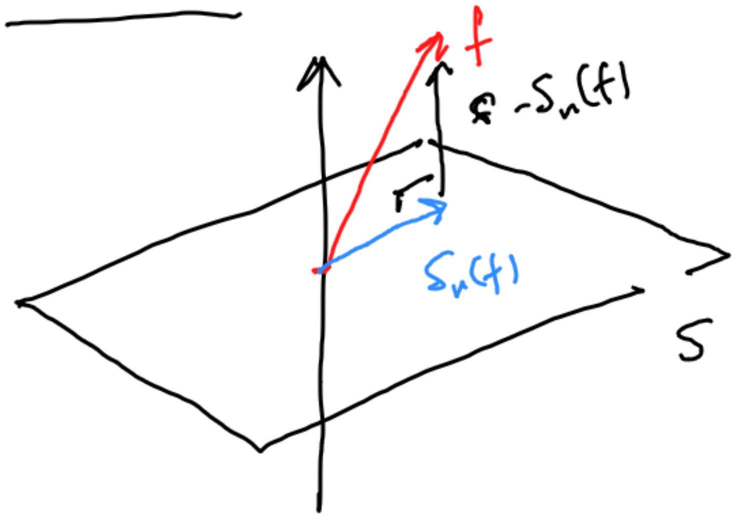
$S_n(f)$

DEM:

$$\langle f-S_n(f),\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle-\overbrace{\langle S_n(f),\varphi_i\rangle}^{\langle f,\varphi_i\rangle}=0$$

$$\langle S_n(f),\varphi_i\rangle=\Big\langle\sum_{k=1}^{n}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k,\varphi_i\Big\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle f,\varphi_k\rangle\overbrace{\langle\varphi_k,\varphi_i\rangle}^{\delta_{ki}}=\langle f,\varphi_i\rangle \quad \#$$

Corolario:



$$\|f - S_n(f)\|^2 + \|S_n(f)\|^2 = \|f\|^2$$

(por Pitágoras)

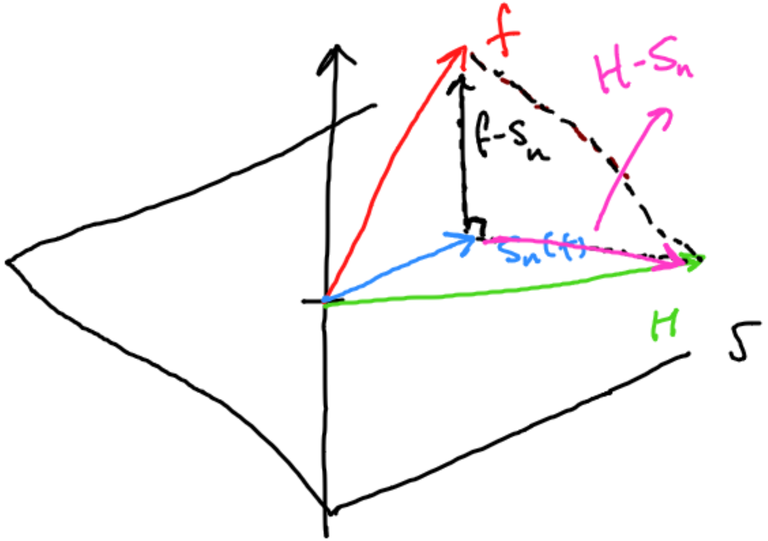
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \leq \|f\|^2}$$

Corolario 8.3: $\|S_n(f)\| \leq \|f\|$

Observación: $S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \qquad \|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2$

Análogo: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|^2 = \sum x_i^2 \qquad x = \sum x_i \varphi_i \qquad \varphi_i = (0 \dots 0, 1, 0 \dots 0) = e_i$

Teorema 0.1: $\|f - S_n(f)\| \le \|f - H\| \quad \forall H \in S$



DEM:

$$\|f-H\|^2 = \|f - S_n(f) + \underbrace{S_n(f) - H}_{\in S}\|^2$$

$$= \|f-S_n(f)\|^2 + \underbrace{\|S_n(f)-H\|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|f-S_n(f)\|^2$$

\#\#

Observación: La proyección ortogonal minimiza la distancia de f a el sub-espacio S.

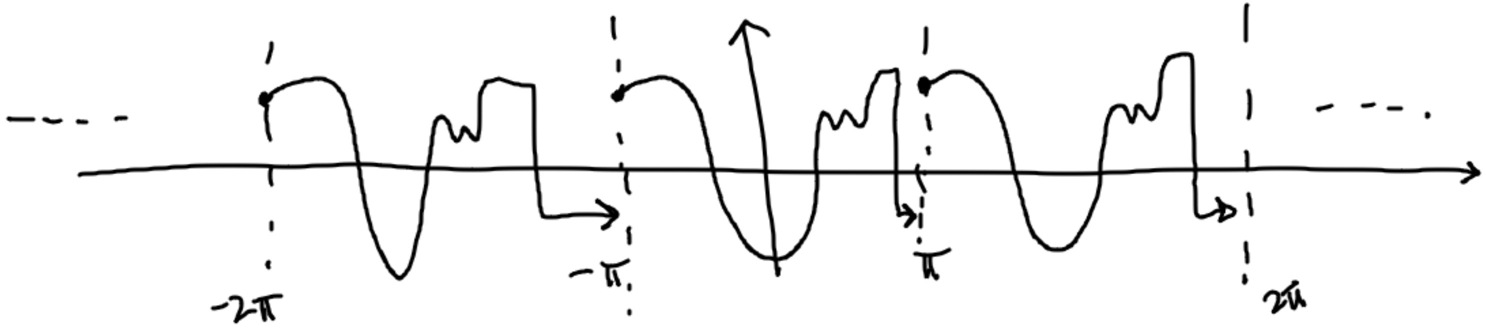
El espacio de las funciones 2π- periódicas:

$$V = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{, continuas a trozos y } 2\pi\text{-periódicas} \right\}$$

donde:

1) continua a trozos quiere decir finitas discontinuidades.

2) $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$



Producto interno: $\underset{=}{\langle f, g \rangle} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$

$f, g \in V$

Propiedad: $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \operatorname{sen}(3x), \cos(3x), \dots \right\}$

es un conjunto ortonormal.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen}(nx), \cos(nx), n \geq 1 \right\}$$

Coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \langle f, 1/\sqrt{2} \rangle$$

$$a_n = \langle f, \operatorname{sen}(nx) \rangle$$

$$b_n = \langle f, \cos(nx) \rangle$$