Teorema de Cetaev

Sea $\dot{x} = f(x)$ con $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ loc. Lips $\quad \bar{x}$ punto de equilibrio $(f(\bar{x}) = 0)$

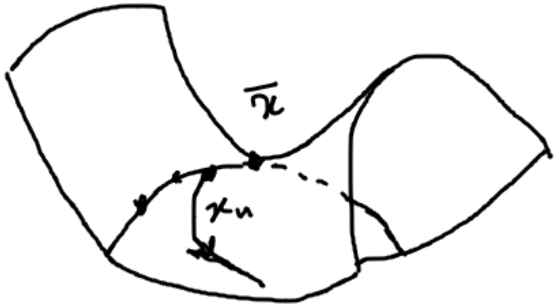
Si existe $V : U \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1

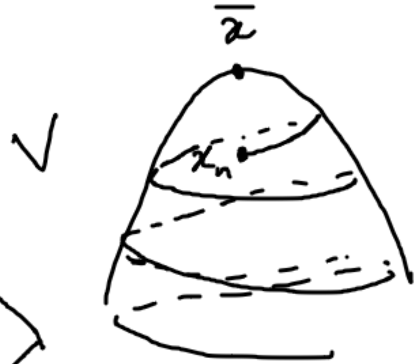
con U entorno de $\bar{x}$ tal que:

1 - $\exists \{x_n\} \subset U$ t.q. $x_n \xrightarrow{\neq} \bar{x}$ y $V(x_n) \leq V(\bar{x})$

2 - $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$

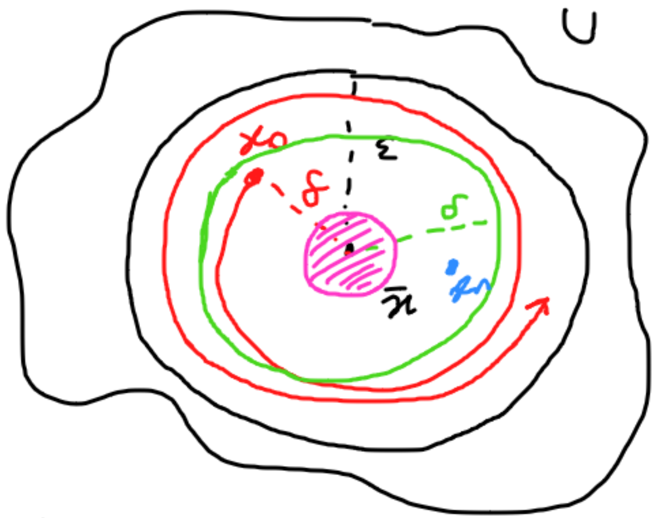
Entonces $\bar{x}$ es inestable.





Dem: Razonemos por absurdo. Supongamos que $\bar{x}$ es estable.

Tomemos $\varepsilon > 0$ / $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$.

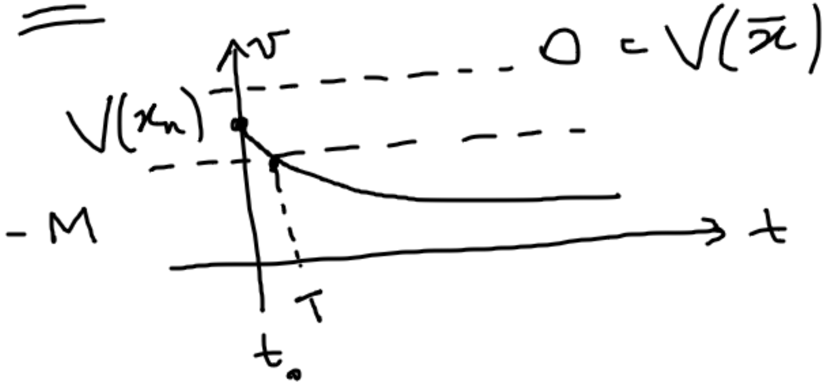


$\exists\, \delta > 0$ / si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$

$\Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall\, t > t_0$

siendo φ sol. con $\varphi(t_0) = x_0$

$x_n \longrightarrow \bar{x}$, $\exists\, n_0$ / si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(\bar{x}, \delta)$

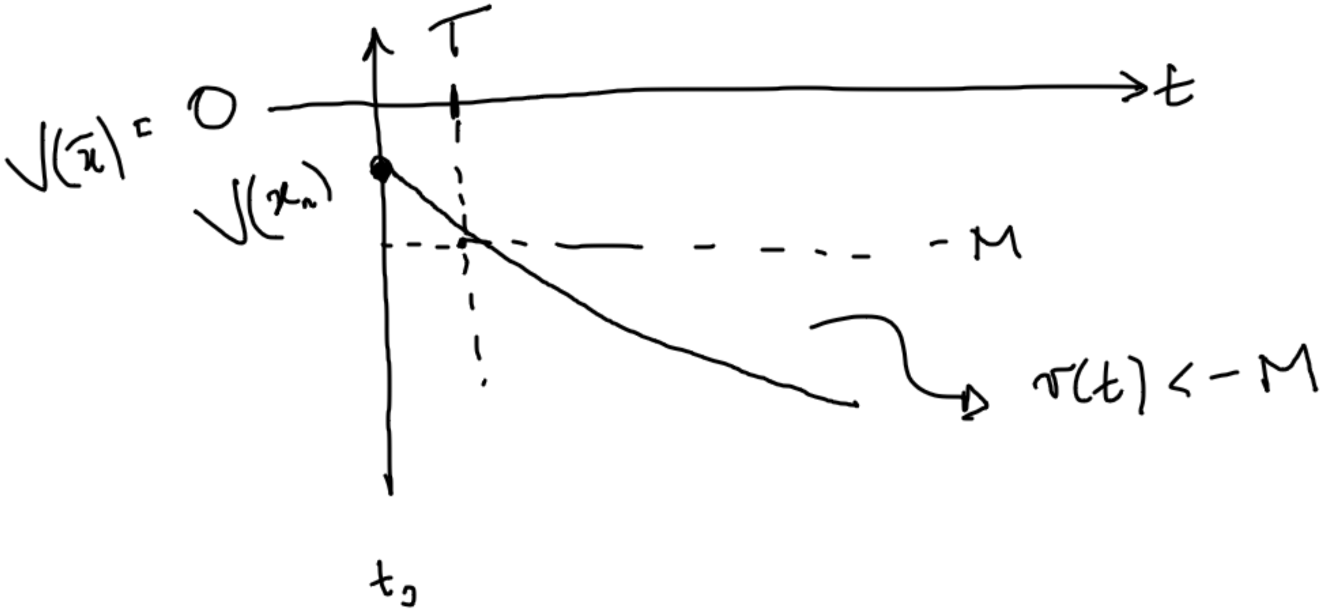


Suponemos siempre que $V(\bar{x}) = 0$

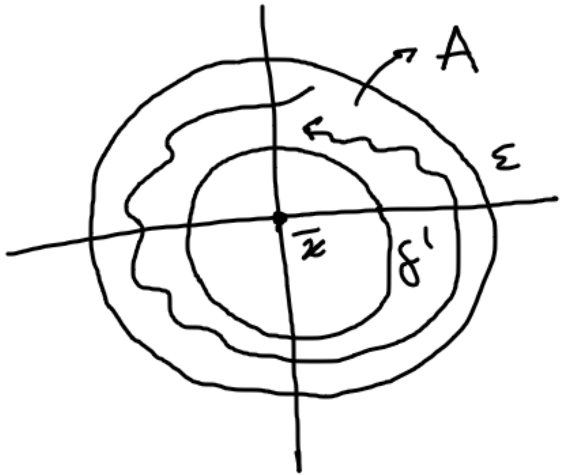
Sea φ la sol. con $\varphi(t_0) = x_n$

$v(t) = V(\varphi(t))$

$\Rightarrow \exists\ M>0$ t.q. $v(t) < -M \quad \forall\ t \geq T$



Como V es continua y $V(\bar{x}) = 0$, $\exists\ \delta' > 0$ t.q. $V(x) > -M$ $\forall\ x \in B(\bar{x}, \delta)$



$\Rightarrow \varphi(t) \notin B(\bar{x}, \delta') \quad \forall\ t > T$

$\Rightarrow \varphi(t) \in A \quad \forall\ t > T$

Como V y $\dot{V}$ son continuas podemos tomar

1) $m = \min\limits_{x \in A} V(x) \Rightarrow \underline{\underline{v(t) \geq m}} \quad \forall\, t > T$

2) $-r = \max\limits_{x \in A} \dot{V}(x) < 0$

$$v(t) = v(T) + \int_T^t \underbrace{\dot{v}(s)}_{\leq -r} ds \leq v(t_0) - r(t-T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \underline{\underline{-\infty}}$$

Absurdo #

Resumen de la prueba:

1) Suponer por absurdo $\bar{x}$ estable

$\Downarrow$

2) Las soluciones se quedan en $B(\bar{x}, \varepsilon)$

(x_0 a menos de δ de $\bar{x}$)

3) Tomo x_n cerca (a menos de δ) de $\bar{x}$

4) $V(x) \approx 0$ para x a menos de $\underline{\underline{\delta'}}$ de $\bar{x}$

$V(\varphi(t)) = v(t) << 0$ $\quad v(t)$ decreciente

$(t \geq T)$

$\Downarrow$

5) $\varphi(t)$ con $\varphi(t_0) = x_n$ está en $A = \{\delta' \leq \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$

6) V tiene mínimo en A

$\dot{V}$ tiene maximo < 0 en A

$\Downarrow$

7) $v(t) \geq m$ y $v(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$. Absurdo.

Teorema de linealización de Grossman - Hartman

$\bar{x}$ punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ f de clase C^1

Podemos aproximar (cerca de $\bar{x}$) $f(x)$ por su Jacobiano (en 1er orden)

$n=1$) $f(x) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$

$n \geq 2$) $f(x) \simeq f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x-\bar{x})$

$\hookrightarrow$ Jacobiano

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \simeq J_f(\bar{x})(x-\bar{x})}$$

La idea es comparar $\dot{x} = f(x)$ con la ecuación lineal $\dot{x} = J_f(\bar{x})(x - \bar{x})$

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f(x_1, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1 \cdots x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\right)$$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x), & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & , \cdots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x f_1 \\ \nabla_x f_2 \\ \vdots \\ \nabla_x f_n \end{pmatrix}$$

<u>Teorema G-H</u>: $f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ clase C^1 $\bar{x}$ pto. eq. de $\dot{x} = f(x)$

Entonces:

1) Si todos los valores propios de $J_f(\bar{x})$ tienen parte real negativa $\Rightarrow$ $\bar{x}$ es asint. estable.

2) Si existe un valor propio de $J_f(\bar{x})$ con parte real positiva $\Rightarrow$ $\bar{x}$ es inestable.

Ejemplo 0.3 de las notas:

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} \dot{x} = y(x^2+1) \\ \dot{y} = -x(x^2+1) \end{cases}$$

Todas tienen al $(0,0)$ como único pto. de equilibrio.

Todas tienen parte lineal en $(0,0)$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

Ej (1)

$$J_{f_1}(0,0) = \left.\begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}\right|_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 1 \begin{cases} \nearrow i \\ \searrow -i \end{cases}$$

todos los v.p. tienen parte real 0.

<u>Estabilidad de (1):</u>

$$V(x,y) = ax^2 + by^2$$

$$= ax^2 + \cancel{cxy}^{\,0} + by^2$$

$a=b$

$$V(0,0) = 0$$

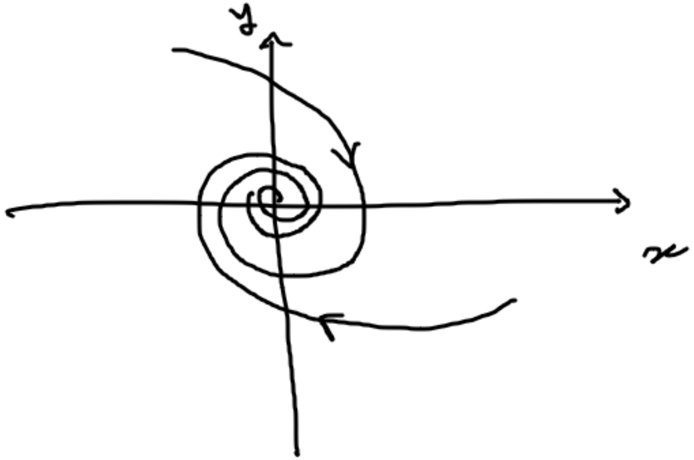
$$\dot{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y - x^3 \\ -x - y^3 \end{pmatrix} = \cancel{2axy} - 2ax^4 \cancel{- 2bxy} - 2by^4$$

$a = b = 1$ $\qquad \dot{V}(x,y) = -2x^4 - 2y^4 < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$V(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad$ 1) mínimo estricto en $(0,0)$

2) $\dot{V} < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ Liapunov 2 $\quad (0,0)$ es asint. estable.



Estabilidad de (2):

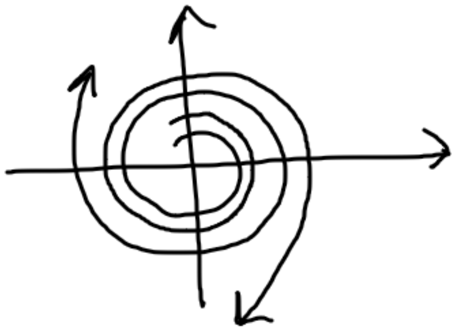
$$V(x,y) = -x^2 - y^2$$ máximo estricto en $(0,0)$

$$\dot V(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y + x^3 \\ -x + y^3 \end{pmatrix} = 2\cancel{xy} + 2x^4 - 2\cancel{xy} + 2y^4$$

$$= -2x^4 - 2y^4 > 0$$

< 0

$\Rightarrow$ Por Cetaev $(0,0)$ es inestable.



Estabilidad de (3) $V(x,y) = x^2+y^2$

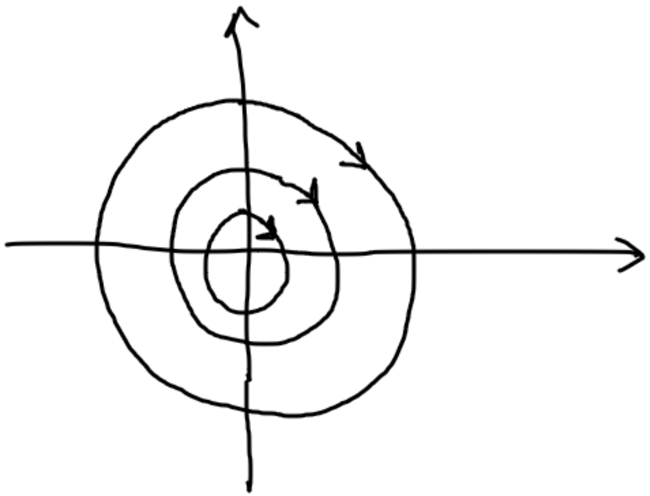
$$\dot{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y(x^2+1) \\ -x(x^2+1) \end{pmatrix} = 2xy(x^2+1) - 2xy(x^2+1)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ V es pre-integral

Estable

pero no asint. estable.



Convergencia de series y sucesiones de funciones

Objetivo es formalizar el concepto: "f_n converge a f"

convergencia puntual (débil)

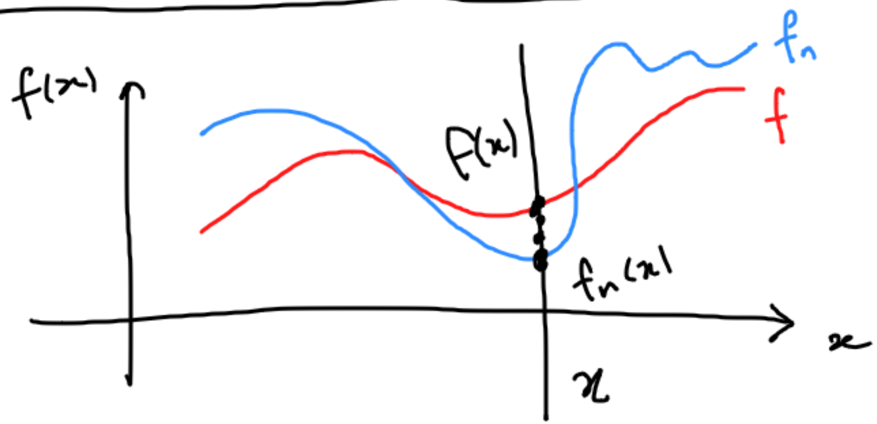
convergencia uniforme (fuerte)

Convergencial puntual (convergencia punto a punto)

Decimos que la sucesión de funciones $f_n : M \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a la función $f : M \to \mathbb{R}$ si:

$$\boxed{\forall x \in M \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)}$$

n_0 puede depender de x.

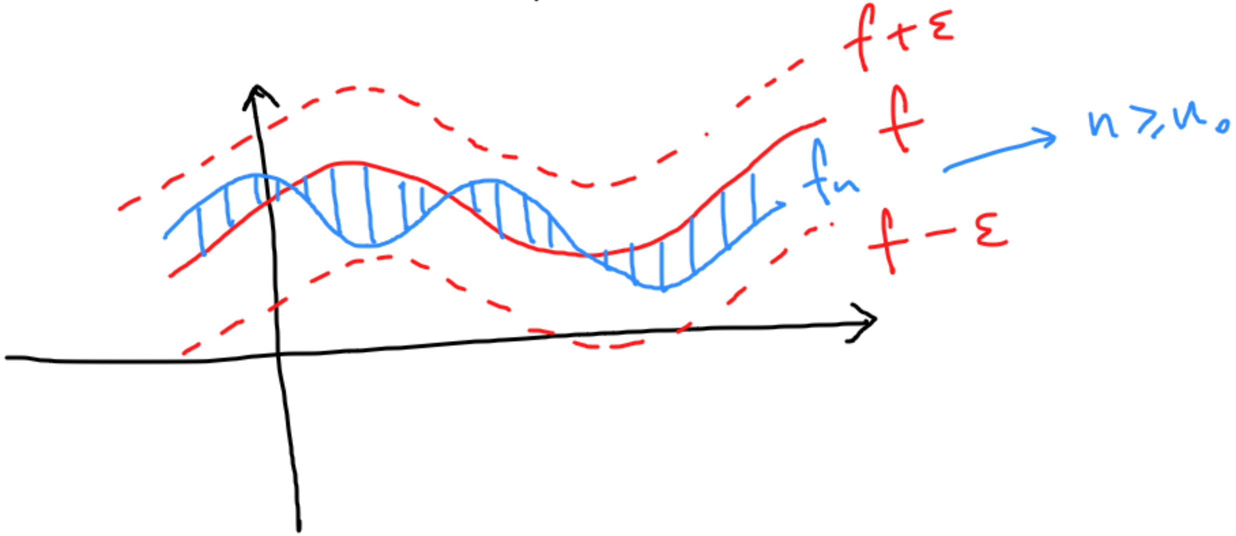


$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0$
$\exists n_0$ t.q si $n \geq n_0$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Convergencia uniforme: Decimos que $f_n : M \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : M \to \mathbb{R}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \underline{\underline{n_0}} \ / \ \text{si } n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in M.$$

(n_0 es el mismo para todos los $x \in M$)

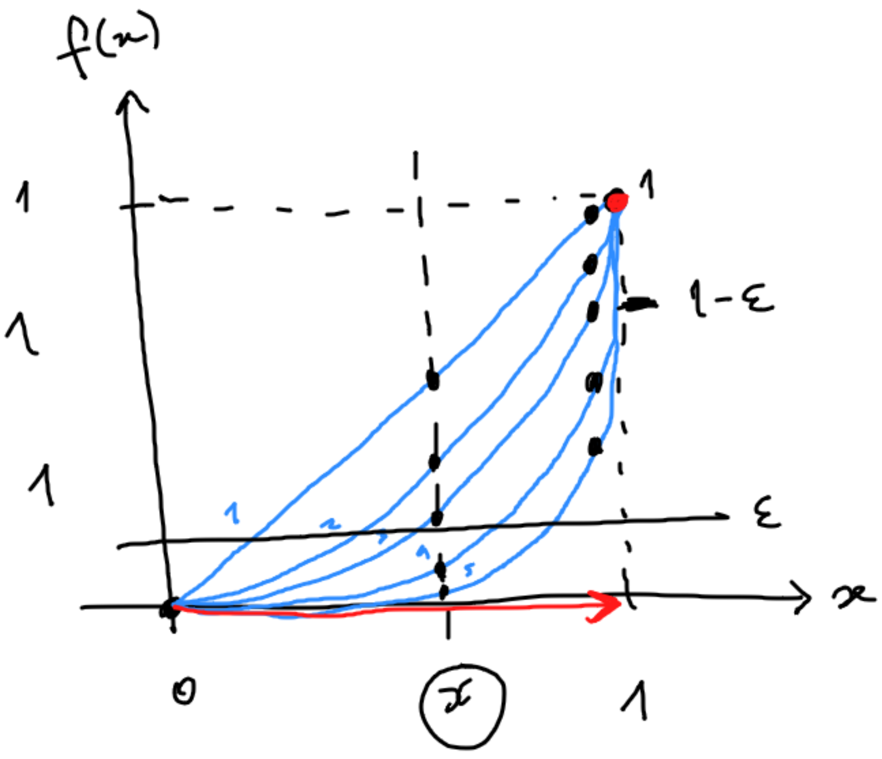


Parte 1) c) de la ficha:

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$$



f_n converge puntualmente a f, $\quad f_n \xrightarrow{c.p.} f$

pero no uniformemente $\quad f_n(x) \xrightarrow{c.p.} f(x)$

$x \leq 1 \qquad f(x) = 0$

$$|\underbrace{f_n(x)}_{x^n} - \underbrace{f(x)}_{0}| = |x^n| = x^n$$

$$x^n < \varepsilon$$

$$n \ln(x) < \ln(\varepsilon)$$

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)}$$

Si, fijo $x \in [0,1)$, para que

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ preciso

$$n > \underbrace{\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)}}_{n_0} \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$$

$x \to 1$