Aplicaciones del Teo. de Picard al estudio de soluciones maximales

$\hookrightarrow$ Teorema de Escape de compactos.

(Quedará para después del parcial el punto 9 y 10 de la Ficha 3).

El teorema de escape de compactos sirve para determinar en muchos casos los intervalos maximales.

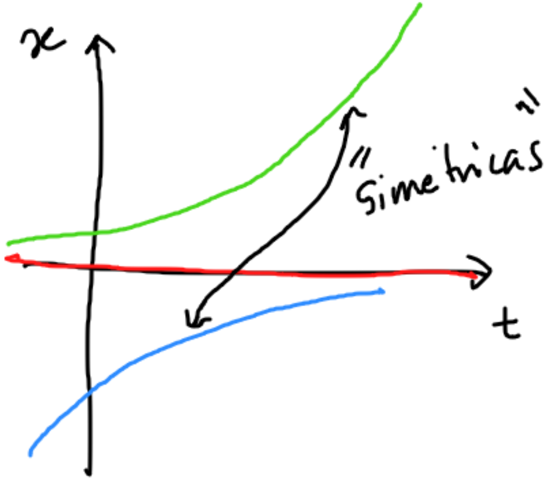
<u>Ejemplo</u>: $\dot{x} = x^2$

Autónoma

0 punto de equilibrio

$x(0) = x_0$

$y(0) = -x_0$



Si $x(t)$ es solución

$\Rightarrow y(t) = -x(-t)$

$\dot{y}(t) = (-x(-t))^{\cdot} = \cancel{-}\dot{x}(-t)\cancel{(-1)} = x(-t)^2 = y(t)^2$

Variables separables,
$$\dot{x} = x^2 \iff \frac{dx}{x^2} = dt$$
$(x_0 \neq 0)$

$x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0.$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{u^2} = \int_{t_0}^{t} ds$$

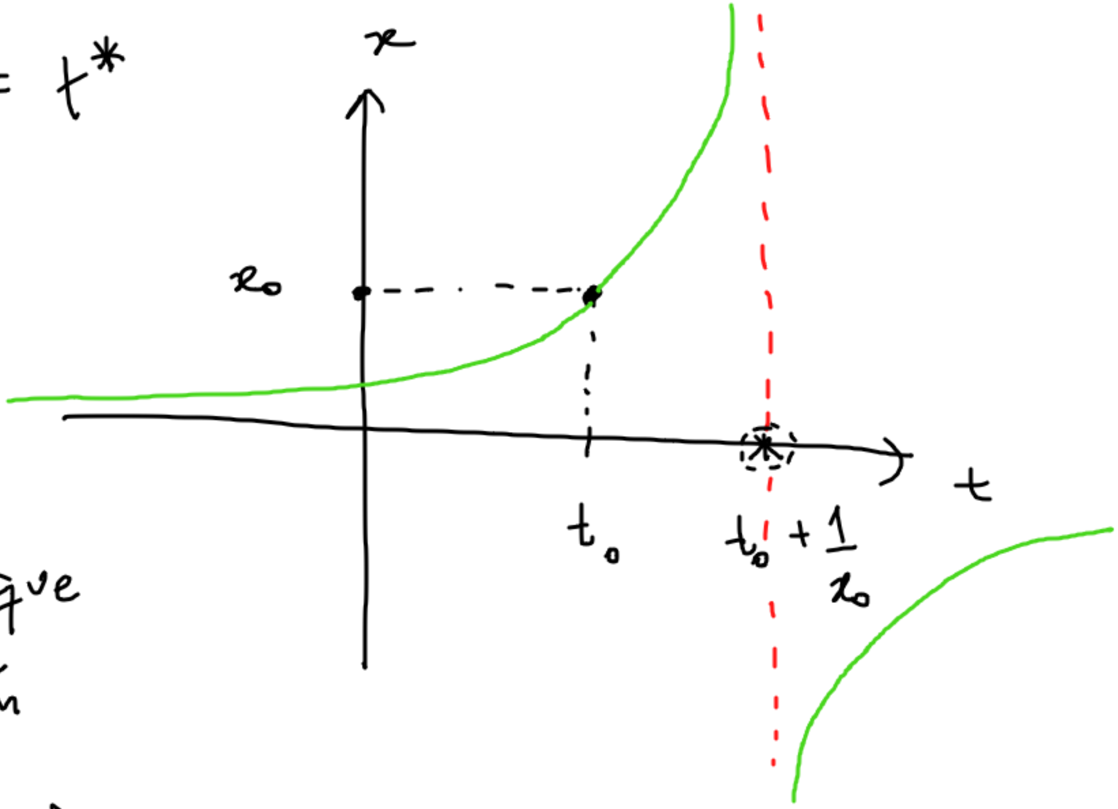
$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = \left[-\frac{1}{u} \right]_{x_0}^{x} = t - t_0$$

$$-\frac{1}{x} = t - t_0 - \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - (t - t_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - (t - t_0)} = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{x_0} + t_0\right)}_{t^*} - t}$$

$$x(t) = \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{x_0}+t_0\right)}_{t^*} - t} \qquad \forall\ t \neq t^*$$



Está definida en $\left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right)$

Es la solución maximal porque no admite ninguna extensión

$$I(t_0, x_0) = \left(-\infty,\ t_0 + \frac{1}{x_0}\right)$$

Teorema de Escape de compactos

Sea $\dot{x} = f(t,x)$ una ED con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua
espacio-tiempo
abierto

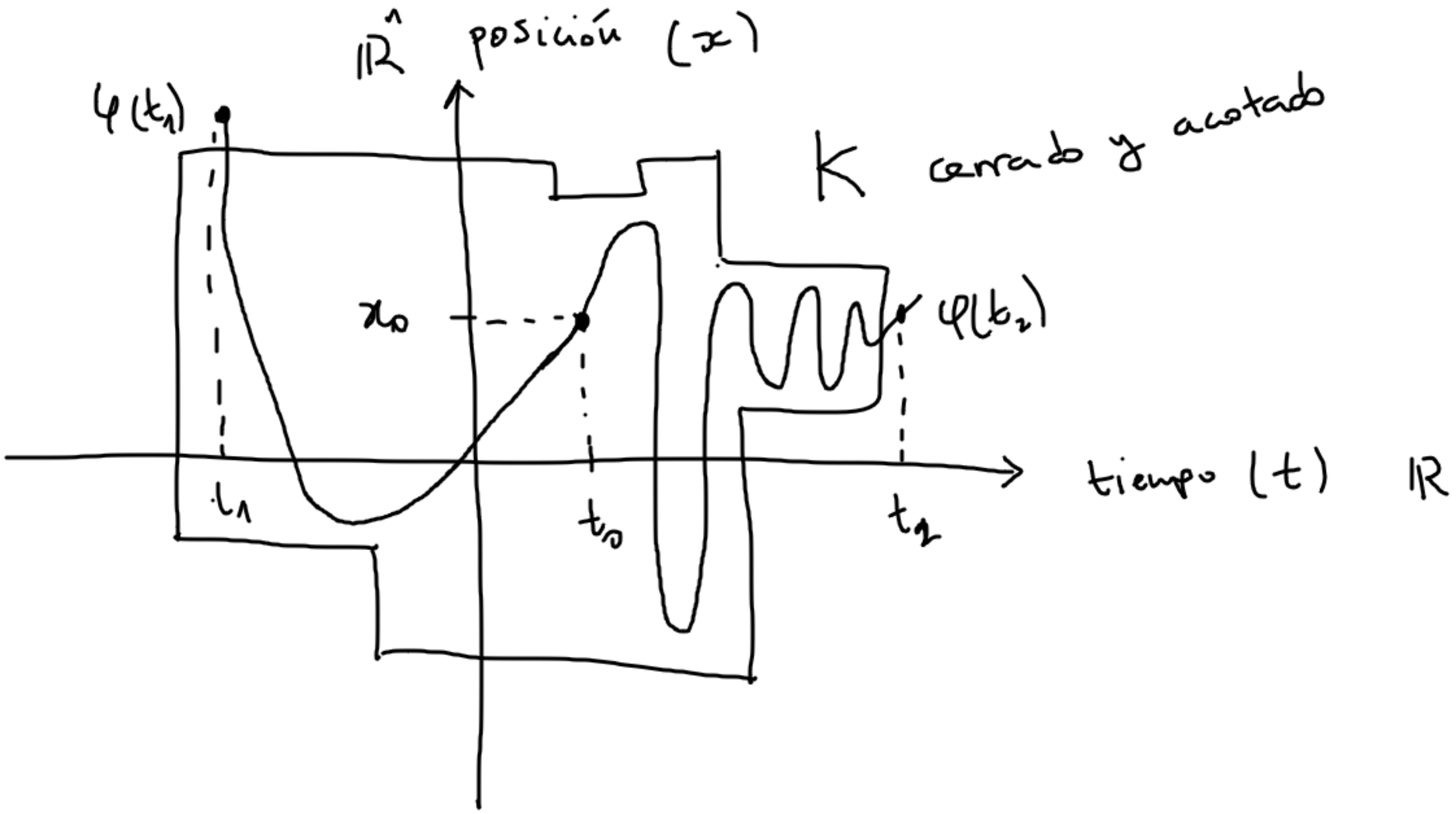
y loc. Lipschitziana. Consideremos una condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$.

y $\varphi : I = I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Dado un compacto $K \subset \Omega$ existen tiempos
(cerrado y acotado)

(pasado) $t_1 < t_0$, $t_1 \in I$ t.q. $(t_1, \varphi(t_1)) \notin K$

(futuro) $t_2 > t_0$, $t_2 \in I$ t.q. $(t_2, \varphi(t_2)) \notin K$.

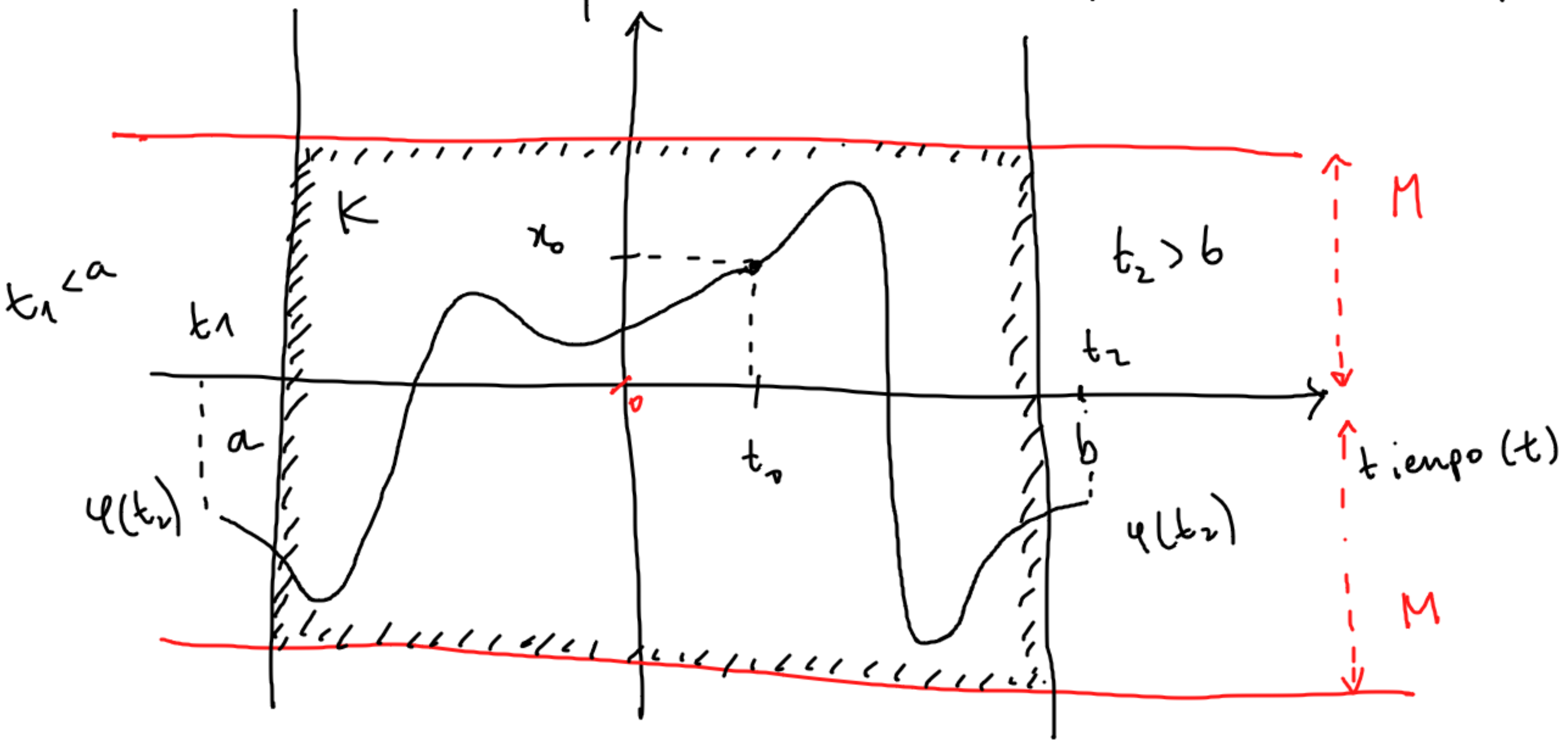


Espacio-Tiempo

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Consecuencia:

Una solución acotada (maximal) $\left(\|x(t)\| \leq M\right)$ debe estar definida para todo tiempo

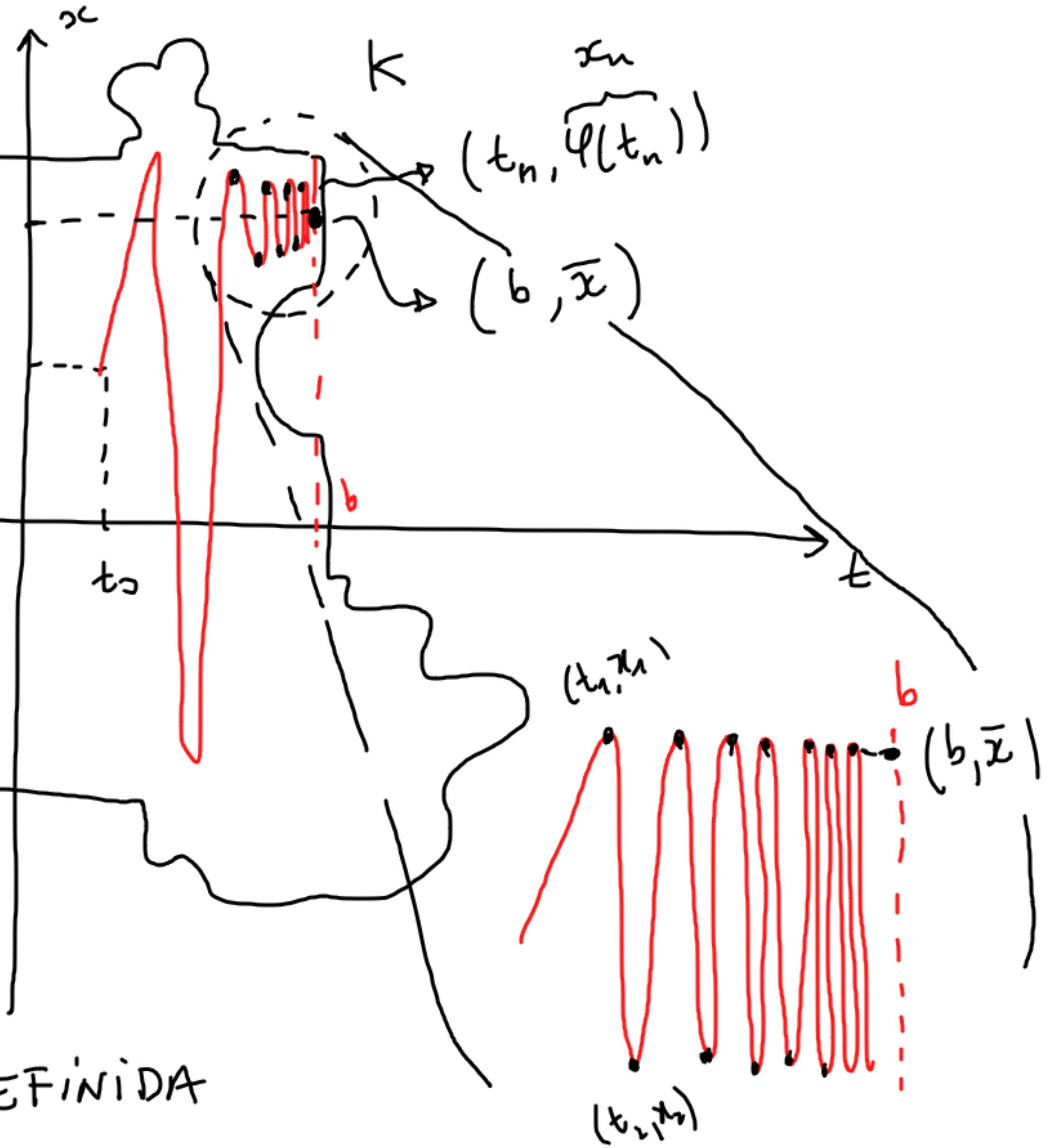


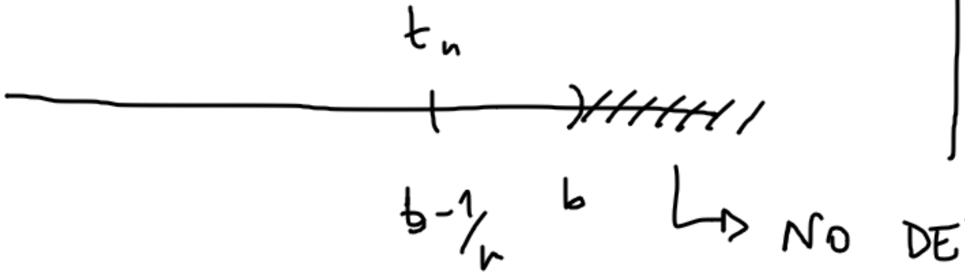
Prueba: Por absurdo:

$I(t_0, x_0)$ está acotado superiormente

$\sup I = b$

$t_n = b - \frac{1}{n}$

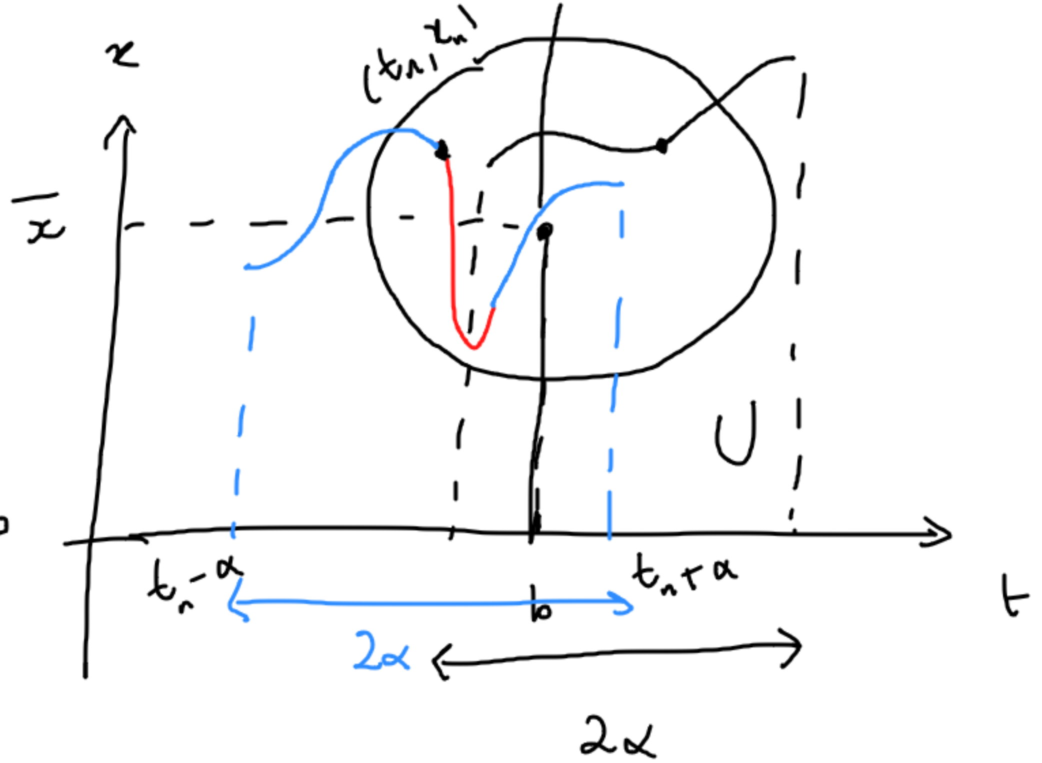




Por Picard:

Basta tomar n grande para que $t_n + \alpha > b$

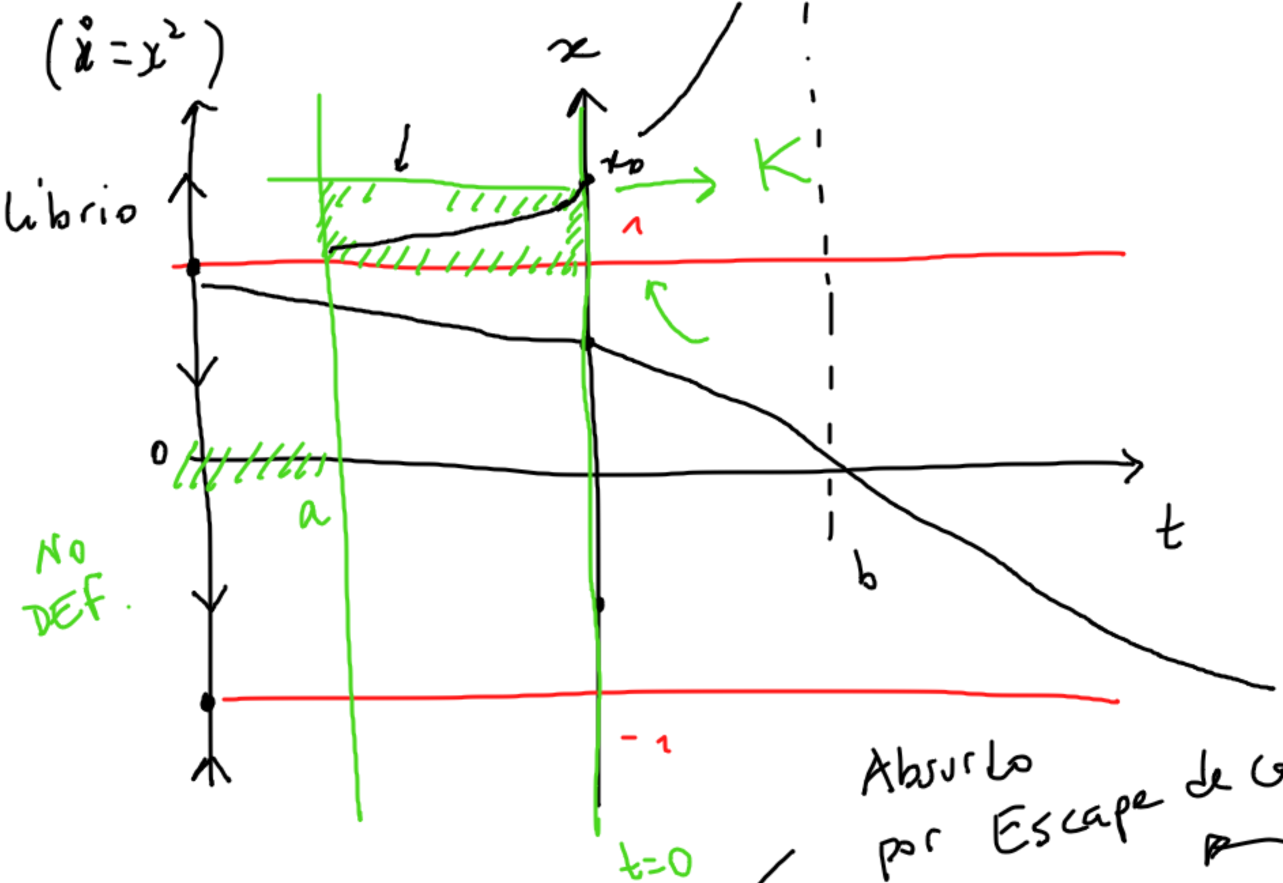
$b - t_n < \alpha$



Esto contradice que $b = \sup I$.

Ejemplo: $\dot{x} = x^4 - 1$ $\quad (\dot{x} = x^2)$

Puntos de equilibrio



$x(0) = x_0$

Caso 1 : $-1 < x_0 < 1$

$-1 < x(t) < 1$

$|x(t)| < 1$

$\Rightarrow x(t)$ acotada

$I = \mathbb{R}$

Caso 2: $x_0 > 1$

$\Rightarrow (-\infty, b)$

Absurdo por Escape de compactos.

Supongamos $I = (a, b)$ con $a > -\infty$

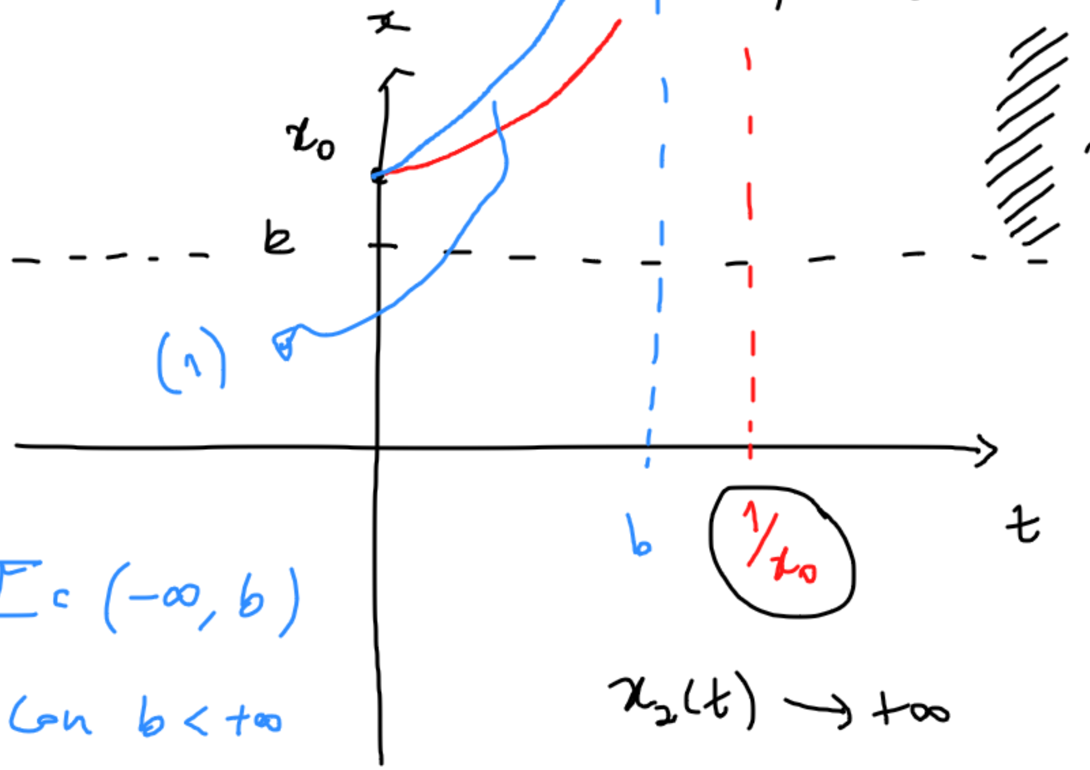
Tomo $\boxed{K = [a, 0] \times [1, x_0]}$

Como $x(t)$ es creciente y 1 es pto eq. $\Rightarrow (t, x(t)) \in K \quad \forall t \leq 0$

$$(*_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = x^4 - 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$(*_2) \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x_0 > 1$



$\to x^4 - 1 > x^2$

$x^4 - 1 > x^2$

$x^4 - x^2 - 1 = 0$

$I \subset (-\infty, b)$

con $b < +\infty$

$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) \qquad \dfrac{1}{x^4-1} =$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$

$x_2(t) \to +\infty$

$\Rightarrow x_1(t)$ se va a $+\infty$

$b \le 1/x_0 < +\infty$