Teorema de Picard y sus aplicación

locales

Existencia y unicidad de soluciones a una ecuación diferencial con condición inicial. Las aplicaciones se centrarán en el estudio de los intervalos en donde las soluciones están definidas.

Dos etapas:

1) Estudiar existencia y unicidad de las soluciones (locales) bien cerca de la condición inicial.

2) Estudiar el intervalo mas grande en donde podemos definir dicha solución.

Funciones Lipschitz en la variable "espacial"

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

t = "tiempo" x = "posición"

$$\mathbb{R} \leftarrow \quad \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t,x) \in \underset{\text{tiempo}}{\mathbb{R}} \times \underset{\text{espacio}}{\mathbb{R}^n}$$

Lipschitz en la variable x.

<u>DEF</u>: Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

decimos que es Lipschitz en la variable x si

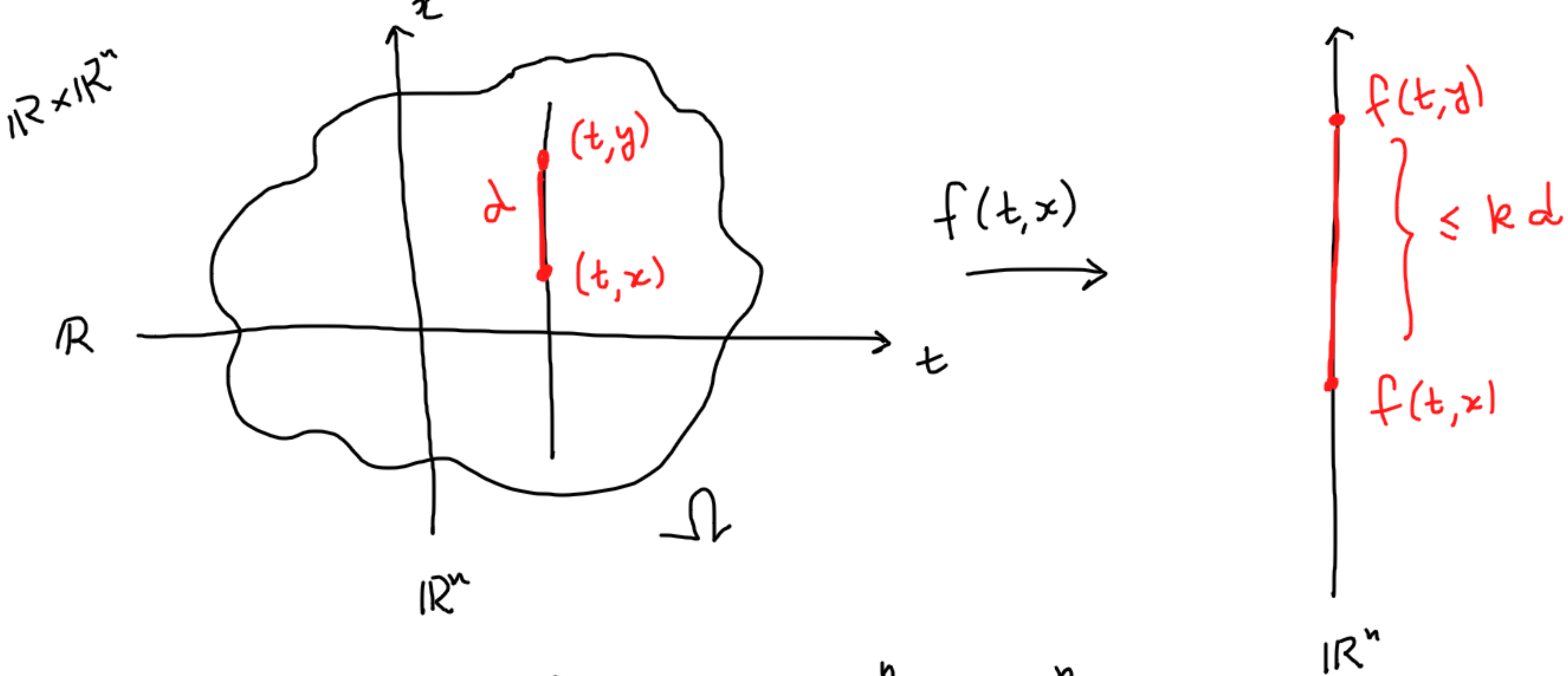
existe una constante $K > 0$ t.q.

distancia de las imágenes.

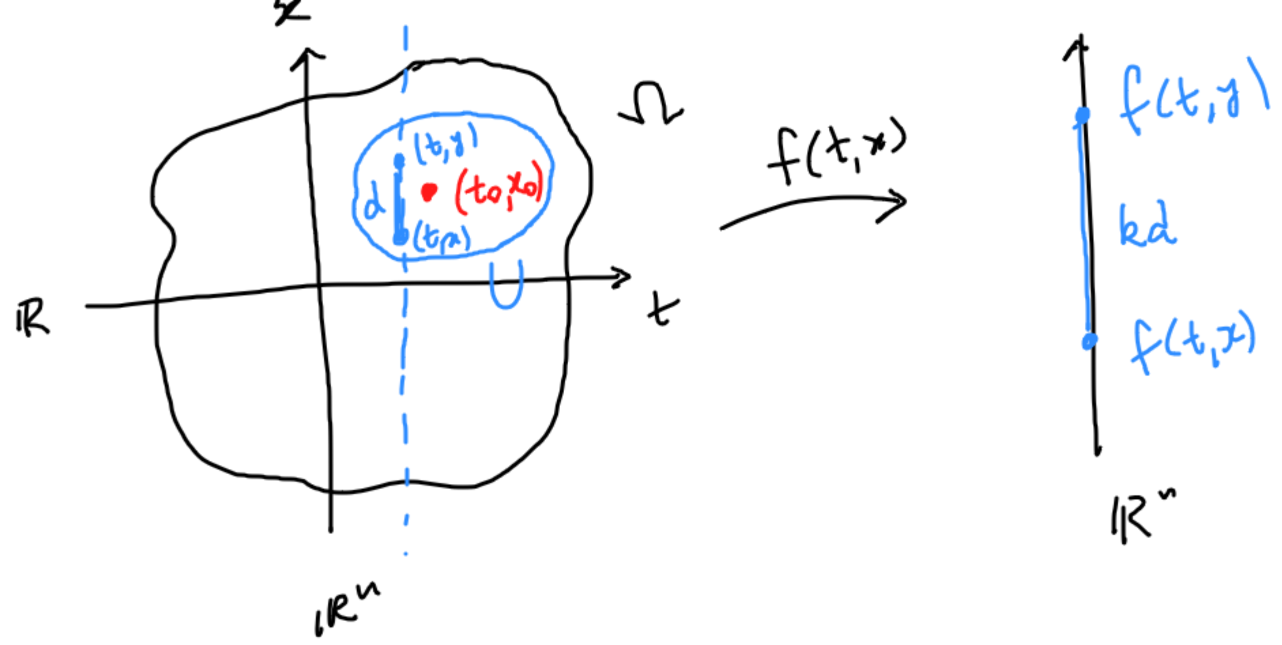
$$\underbrace{\| f(t,y) - f(t,x) \|} \leq K \underbrace{\| y - x \|}$$

dist. en el dominio

"La distancia de las imágenes está controlada por la distancia en el dominio"



<u>DEF</u>: La función $f:\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ con Ω <u>abierto</u> es <u>localmente Lipschitziana</u> (en x) si para todo punto $(t_0,x_0)\in\Omega$ existe un entorno $U\subset\Omega$ de (t_0,x_0) y una constante $k>0$ t.q. $\|f(t,y)-f(t,x)\|\leq k\|y-x\|\quad\forall\,(t,y),(t,x)\in U$.



La diferencia es que la constante k puede depender del entorno U.

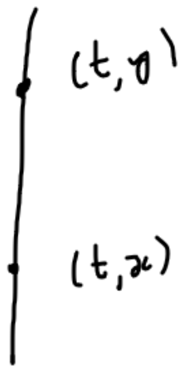
Lipschitziana $\Rightarrow$ localmente Lipschitziana

$\not\Leftarrow$

<u>Observación</u>: Si $f(t,x)$ es de clase C^1 en un abierto Ω, entonces f es localmente Lipschitziana.

C^1 = derivable con derivadas continuas.

Consecuencia del teorema del valor medio:



$$\|f(t,y)-f(t,x)\| \le \overbrace{\text{"máximo de la derivada en el segmento } (t,y)-(t,x)\text{"}}^{\text{existe porque las derivadas son continuas.}} \cdot \|y-x\|$$

TEOREMA DE PICARD: Consideremos la ecuación diferencial con valor inicial

$$(*_0) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

en donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω es abierto, continua y localmente Lipschitziana en la variable x, y $(t_0, x_0) \in \Omega$.

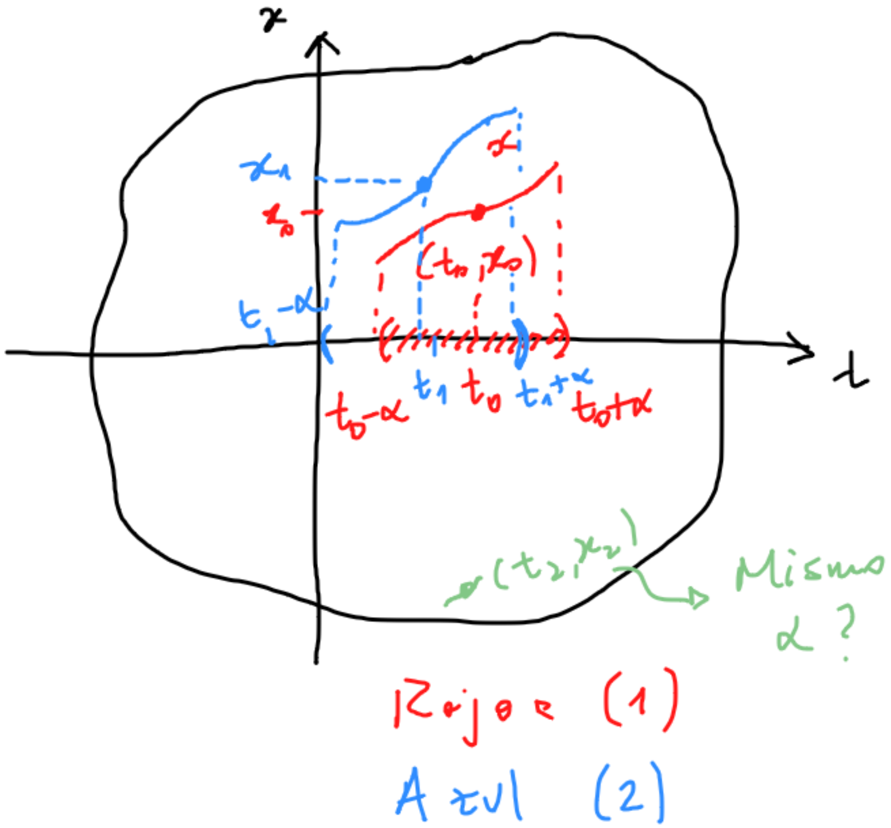
Entonces:

1) Existe $\alpha > 0$ t.q. $(*_0)$ tiene una <u>única</u> solución definida en el intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$

mismo α

2) Existe $r > 0$ t.q. si $\|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)\| < r$ la ecuación

$(*_1) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ tiene una unica solución definida en $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$



Notar 2 cosas importantes en el enunciado:

1) Nos garantiza la existencia y la unicidad de una solución que pasa por (t_0, x_0) en un intervalo $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$. En principio α depende del punto (t_0, x_0).

2) Puedo elegir el mismo α para todos los puntos (t_1, x_1) que están cerca de (t_0, x_0) (a menos de r).

Ejemplo: $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ raiz positiva

Hay unicidad de soluciones ?

Tenemos 2 soluciones : 1) $x_1(t) = 0 \quad \forall \ t \in \mathbb{R}$

2) $x_2(t) = t^2/4$ $\qquad \dot{x}_2 = \dfrac{2t}{4} = t/2$ $\qquad |t/2|$

$\sqrt{a^2} = |a|$

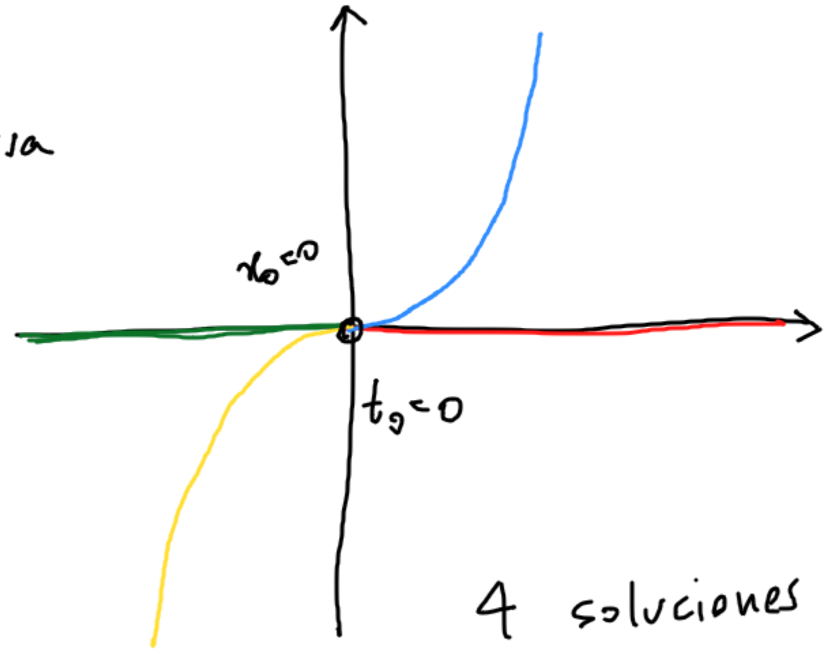
raiz positiva

$$\sqrt{|x_2|} = \sqrt{\left|t^2/4\right|} = \sqrt{t^2/4} = \begin{cases} \dfrac{t}{2} & \text{si } t \geq 0 \\ -t/2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t^2/4 & \text{si } t \geq 0 \\ -t^2/4 & \text{si } t < 0 \end{cases} \qquad x_3(t) = \begin{cases} t^2/4 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ -t^2/4 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \quad \text{raiz positiva} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$



4 soluciones

$x_1 = r + v$

$x_2 = a + a$

$x_3 = a + v$

$x_4 = a + r$

¿Porqué no contradice el teorema de Picard?

$x(0)=0$ tenemos que mirar el punto $(0,0)$

$$f(t,x) = \sqrt{|x|}$$

$$\frac{\| f(t,x) - f(0,0) \|}{\| x - 0 \|} = \frac{\| \sqrt{|x|} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\sqrt{|0|}} \|}{\| x - 0 \|} = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{\cancel{\sqrt{|x|}}}{\cancel{\sqrt{|x|}}\sqrt{|x|}}$$

$n=1$

$\| \cdot \| = | \cdot |$

valor absoluto

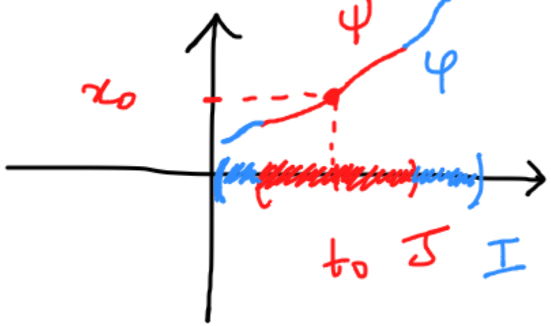
$$= \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leq K \quad ?$$ para x cerca de 0.

Pero $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \longrightarrow +\infty$ cuando $|x| \to 0$

$\Rightarrow$ No es localmente Lipschitziana.

Soluciones maximales

$$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



DEF PREVIA: (Extensión de una solución)

Usemos la notación (I, φ) para una solución $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definida en el intervalo abierto I con $t_0 \in I$ y $\varphi(t_0) = x_0$.

Decimos que (I, φ) es una *extensión* de (J, ψ) si

1) $J \subset I$ 2) $\varphi\big|_J = \psi$ $\big(\varphi(t) = \psi(t) \ \forall\, t \in J\big)$

DEF: Una solución (I, φ) de $(*)$ es <u>maximal</u> si la única extensión que admite es ella misma.

I se llama intervalo maximal, $I = I(t_0, x_0)$

Existencia y unicidad de soluciones maximales (Teo. 0.3)

Consideremos $(*)$ $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ con f continua, loc. Lips en x.

Entonces existe una única solución maximal (I, φ)

$(I = I(t_0, x_0))$

Lema 0.2: Sea f en las hipótesis de Picard

Sean (I_1, φ_1), (I_2, φ_2) soluciones de $(*)$ $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

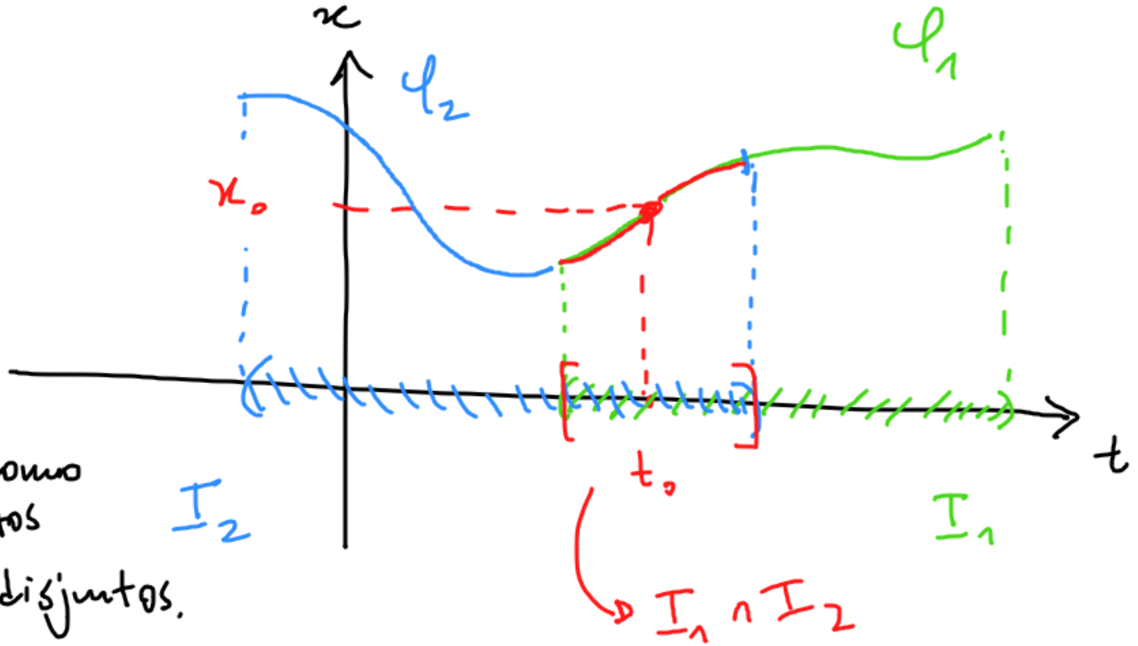
$\Rightarrow \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \forall\, t \in I_1 \cap I_2.$

Se basa en

la noción de

CONEXIDAD

intervalo NO se puede escribir como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos.



$J = I_1 \cap I_2 \Rightarrow J$ es un intervalo (convexo)

Definimos dos conjuntos:

$$A = \{ t \in J : \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \}$$

$$B = \{ t \in J : \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t) \}$$

Quiero probar que $A = J$

y que $B = \emptyset$.

Notar que: - $A \cap B = \emptyset$

- $A \neq \emptyset$ porque $t_0 \in A$ $\quad \varphi_1(t_0) = x_0 = \varphi_2(t_0)$

Resta probar que los dos son abiertos.

} por continuidad B es abierto.

Probemos que $A = \{ t \in J : \varphi_1(t) = \varphi_2(t) \}$ es abierto.

Sea $t_1 \in A \Rightarrow x_1 = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$

Por el teo. de Picard $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$ existe una única

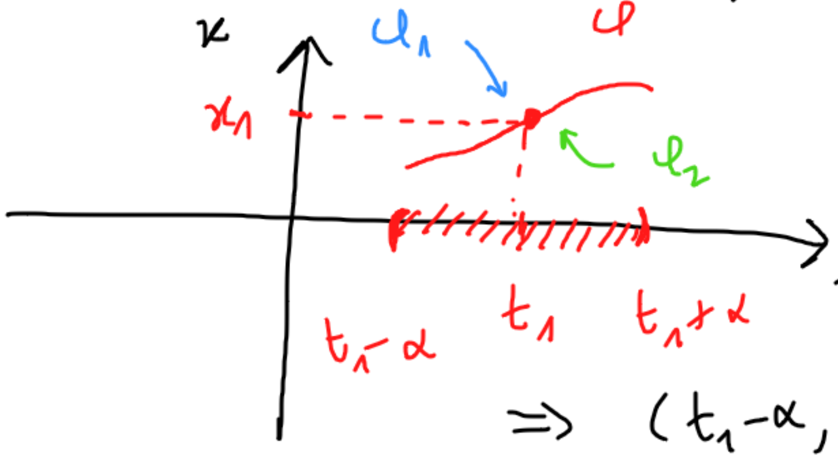
solución φ definida en $(t_1-\alpha, t_1+\alpha)$

$\Rightarrow$ en $(t_1-\alpha, t_1+\alpha)$

$\varphi_1 = \varphi = \varphi_2$

$\Downarrow$

$\varphi_1 = \varphi_2$



$\Rightarrow (t_1-\alpha, t_1+\alpha) \subset A$.

A es abierto. $\Leftarrow$

Como J es conexo $\Rightarrow$ $B = \emptyset$ $\Rightarrow$ $A = J$. #