Transformada de Laplace

$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Operador}} \longrightarrow g(t)$

input ... output

Ejemplos:
- Derivar
- Integrar
- Operadores lineales.

posición $x(t)$ $\longrightarrow \boxed{\text{Derivar}} \longrightarrow$ velocidad $v(t)$

t = tiempo
= la variable

Ejemplos:
- Laplace
- Fourier
- ⋮

$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{Transformada}} \longrightarrow F(s)$

input, variable t ... output, variable s

Señal $f(t)$ $\longrightarrow \boxed{\text{Laplace}} \longrightarrow$ Señal $F(s)$

t = tiempo. ... s = frecuencia

Motivación a la fórmula de la transformada de Laplace

Series de potencias (Mundo discreto variable n natural)

Recurrencia: $a_{n+1} = \lambda a_n$

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_n = a(n)$

$a_n = a_0 \lambda^n$

$a_{n+1} x^{n+1} = \lambda a_n x^{n+1}$

$= (\lambda a_n x^n) x$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}}_{A(x) - a_0} = \lambda \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)}_{A(x)} x$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

función

$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$A(x)$

$A(x) - a_0 = \lambda x A(x)$

$A(x)(1 - \lambda x) = a_0$

$$\boxed{A(x) = \frac{a_0}{1 - \lambda x}}$$

Sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Serie de potencias}}$ $\longrightarrow$ $A(x)$

Ejemplos:

1) $a(n) = 1$, $a_n = 1 \ \forall n$

$A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$

$= \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$

2) $a_n = 1/n! \ \forall n$

$A(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$= e^x$

Recurrencia a_n

$\downarrow$ Transformada Serie de potencias

Ecuación alg. para $A(x)$

$\downarrow$ Anti-tranformada

solución

La tranformada de Laplace hace lo mismo en ecuaciones diferenciales.

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$f(t)$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = ?$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) x^t \, dt$$

$x = e^{-s}$ (para que $s > 0$)

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

Definición: La transformada de Laplace de una función $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(t)$, es

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\cdot f(t)\,dt$$

Notación: $(\mathcal{L}f)(s)=F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

Ejemplos: $f(t)=1 \quad \forall t\geq 0$

caso particular de

$\rightarrow f(t)=e^{at} \quad a\in\mathbb{R},\ t\geq 0 \quad (a=0)$

$\rightarrow f(t)=t^n \quad n\in\mathbb{N},\ t\geq 0 \quad (n=0)$

$$(\mathcal{L} f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \underbrace{f(t)}_{\substack{\shortparallel \\ 1}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{+\infty}$$

$\mathcal{L}(1)(s)$

$$= \begin{cases} \dfrac{0+1}{s} & \text{si } s>0 \\ +\infty & \text{si } s=0 \\ -\infty & \text{si } s<0 \end{cases}$$

$s>0$: Si converge; $s=0$, $s<0$: No converge

$$= 1/s \, , \quad s>0$$

En resumen: $\mathcal{L}(1)(s) = 1/s$ para $s>0$.

<u>Ejemplo:</u> $f(t)e^{at}$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) e^{at} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt$$

$$= \mathcal{L}(f(t))(s-a)$$

Resumiendo: $\mathcal{L}(f(t)e^{at})(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$

Observar que puede cambiar el dominio de la TL.

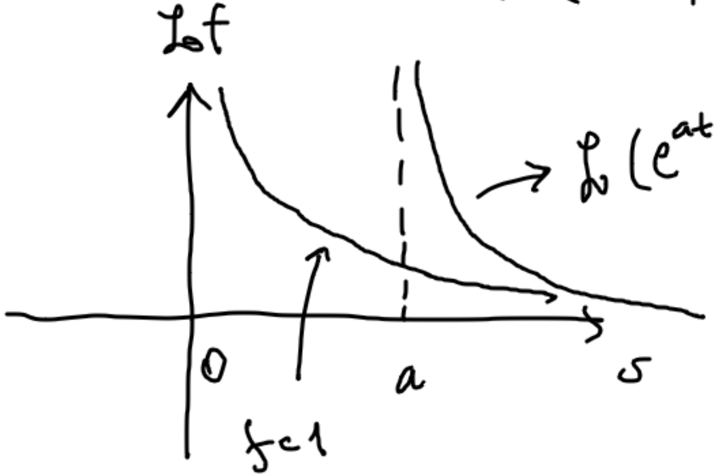
$$\mathcal{L}(e^{at})(s) \underset{\uparrow}{=} \mathcal{L}(1)(s-a) = \frac{1}{s-a}$$

aplicamos

el ejemplo con $f(t)=1$

$\mathcal{L}(1) = 1/s \quad , s>0$

$\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a} \quad , s>a$



Ejemplo: $f(t) = \cos(\omega t)$, $\Longrightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \dfrac{s/\omega^2}{1 + s^2/\omega^2} = \boxed{\dfrac{s}{\omega^2 + s^2}}$

$s > 0$

Solución 1: integración por partes

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}}_{D} \underbrace{\cos(\omega t)}_{I} dt = \cancelto{0}{e^{-st} \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} \Big|_0^{+\infty}}$$

$$+ \frac{s}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$$

$$= \frac{s}{\omega} \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}}_{D} \underbrace{\operatorname{sen}(\omega t)}_{I} dt = \frac{s}{\omega} \left[e^{-st} \left(- \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \right]_0^{+\infty} - \frac{s^2}{\omega^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(\omega t)\, dt$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{\omega^2} - \underbrace{\frac{s^2}{\omega^2} \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s)}$$

Solución 2: usando complejos

$$\mathcal{L}(e^{ait}) = \frac{1}{s-ai}, \quad s>0$$

$$e^{iwt} = \cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$e^{-iwt} = \cos(wt) - i\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(wt)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{iwt}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-iwt})$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-wi} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+wi} = \frac{\overbrace{s+\cancel{wi}+s-\cancel{wi}}^{\cancel{2}s}}{\cancel{2}\,\underbrace{(s-wi)(s+wi)}_{s^2+w^2}} = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$$\operatorname{sen}(wt) = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen}(wt))(s) = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-iw} - \frac{1}{s+iw}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{\cancel{s}+iw+(\cancel{s}+iw)}{s^2+w^2} = \frac{w}{s^2+w^2}$$

Resumiendo: $\mathcal{L}(\operatorname{sen}(wt)) = \dfrac{w}{s^2+w^2}$, $\mathcal{L}(\cos(wt)) = \dfrac{s}{s^2+w^2}$

$s > 0$ $\qquad\qquad$ $s > 0$

Ejemplo: $f(t) = t^n$ $\qquad s>0$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}}_{I} \underbrace{t^n}_{D} \, dt = \cancel{-\frac{e^{-st}}{s} t^n \Big|_0^{+\infty}}^{\,0} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} n t^{n-1} \, dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \; s>0}$$

$$= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1})(s)$$

$$= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \mathcal{L}(t^{n-2})(s) = \cdots = \frac{n!}{s^n} \overset{= 1/s}{\underset{t^0}{\mathcal{L}(1)}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Algunas propiedades:

1) Lineal: $\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathcal{L}(f) + c_2 \mathcal{L}(g)$

2) Derivada: calculemos una fórmula par $\mathcal{L}(f')$

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-st}}_{D} \underbrace{f'(t)}_{I}\, dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-s) e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= 0 - f(0) + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

para $f(t)$ de orden exponencial

$$\boxed{\mathcal{L}(f')(s) = s\,\mathcal{L}(f)(s) - f(0)}$$

Definición: Decimos que $f(t)$ es de orden exponencial si $\exists$ $\alpha \geq 0$ y $C > 0$ t.q.

$$|f(t)| \leq C e^{\alpha t}$$

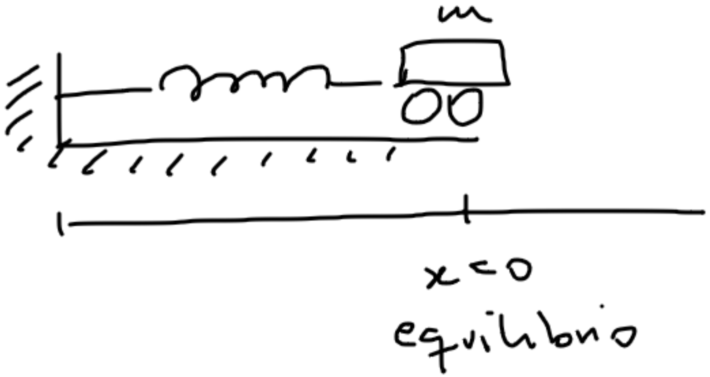
Si f es de orden exponencial:

- $\mathcal{L}(f)(s)$ está definida (por lo menos para $s > \alpha$)

- $e^{-st} f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ (por lo menos para $s > \alpha$)

Resolver una EDiF usando TL.

Ecuación del oscilador armónico simple: → No hay rozamiento
→ No es forzado



Newton:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$x(t)$ incógnita

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x}) &= s\,\mathcal{L}(x) - x(0) \\ \mathcal{L}(\ddot{x}) &= s\,\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{x}) &= s\left(s\overbrace{\mathcal{L}(x)}^{X} - x(0)\right) - \dot{x}(0) \\ &= s^2 X - s\,x(0) - \dot{x}(0) \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\mathcal{L}(m\ddot{x} + kx) = \mathcal{L}(0) = 0$$

$$m\mathcal{L}(\ddot{x}) + k\mathcal{L}(x) = 0$$

$$m\left[s^2 X - s x(0) - \dot{x}(0)\right] + kX = 0$$

$$\left[ms^2 + k\right] X - s m x(0) - m\dot{x}(0) = 0$$

$$\left[ms^2 + k\right] X = m x(0) s + m\dot{x}(0)$$

$$X = \frac{m x(0) s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}$$

$$X = \frac{x(0) s + \dot{x}(0)}{s^2 + \underbrace{k/m}_{\omega_0^2}}$$

$$\boxed{X = \frac{x(0) s + \dot{x}(0)}{s^2 + \omega_0^2}}$$

$$X = x(0)\,\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + \dot{x}(0)\,\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1}(X) = x(0)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right)$$

$$\boxed{x = x(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\operatorname{sen}(\omega_0 t)}$$

Ecuación del oscilador armónico general:

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}(t)}$$

El caso forzado sin rozamiento $(b=0)$:

periódica

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = F\cos(\omega t)}$$

$\omega \neq \omega_0 = \sqrt{k/m}$

Resonancia $\omega = \omega_0$