Ecuaciones lineales

- 1er orden
- 2do orden

Ecuaciones de 1er orden:

coeficientes

término independiente

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = C(t)$$

Si $A(t) \neq 0 \Rightarrow$ Forma estándar

$$\boxed{\dot{x} + p(t)x = q(t)}$$

Hallamos la solución usando el método (Euler) del factor integrante:

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)q(t)\,dt + C\right]$$ donde $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ es el factor integrante

Prueba: (E) $\dot{x} + px = q$

Regla de la derivada del producto

$(ux)^{\cdot} = \dot{u}x + u\dot{x}$

Multiplico por u (E) en ambos lados:

$$\overbrace{u\dot{x} + upx}^{(ux)^{\cdot}} = uq$$

Quiero hallar u t.q. $\cancel{u\dot{x}} + upx = (ux)^{\cdot} = \dot{u}x + \cancel{\dot{x}u}$

$\Longleftrightarrow \boxed{\dot{u} = up}$ ← variables separables en u y t

$$\frac{du}{dt} = up(t) \Longleftrightarrow \frac{du}{u} = p(t)\,dt \Longleftrightarrow \boxed{u = e^{\int p(t)dt}}$$

Observación: 1) si p no depende de t la ecuación se dice a coef. ctes.

2) cuando $q(t) = 0 \ \forall t$ la ecuación se dice homogénea.

Usando la μ encontrada: $(\mu x)^{\cdot} = \mu q$

integro en t : $\mu x = \int \mu(t) q(t)\, dt + c$

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) q(t)\, dt + c \right]$$

Ejemplo: I) $\overline{\dot{x} - x = 1}$ $\quad p(t) = -1 \quad q(t) = 1$

$\underbrace{\mu \dot{x} - \mu x}_{(\mu x)^{\cdot}} = \mu \cdot 1$ $\qquad \cancel{\mu \dot{x}} - \mu \cancel{x} = \overbrace{\dot{\mu} \cancel{x} + \cancel{\mu \dot{x}}}^{(\mu x)^{\cdot}}$

$\boxed{\dot{\mu} = -\mu}$ $\qquad \mu = e^{-t}$ $\qquad -1 + ce^{t}$,,

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t}} \left[\int e^{-t} \cdot 1\, dt + c \right] = \frac{1}{e^{-t}} \left[-e^{-t} + c \right]$$

$$\boxed{x(t) = -1 + ce^{t}}$$

Principio de superposición:

"Sistemas lineales"

$$\underbrace{\dot{x} + p(t)\,x}_{\text{sistema}} = q(t)$$

output input

$$\begin{tikzcd} & x(0) \arrow[d] & \\ q(t) \arrow[r] & \boxed{\text{sistema}} \arrow[r] & x(t) \end{tikzcd}$$

$q(t) \rightsquigarrow x(t)$

Enunciado:

$q_1(t) \rightsquigarrow x_1(t)$

$q_2(t) \rightsquigarrow x_2(t)$

c_1 y c_2 constantes

$$\Rightarrow \quad c_1 q_1(t) + c_2 q_2(t) \rightsquigarrow c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Prueba:

$$(c_1x_1 + c_2x_2)^{\cdot} + p\,(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1(\dot{x}_1 + p x_1) + c_2(\dot{x}_2 + p x_2) = \overline{c_1 q_1 + c_2 q_2} \quad \#$$

Ejemplo: i) $\dot{x} + 2x = 1$ $\quad x(t) = 1/2$ es solución

ii) $\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ $\quad x(t) = t\,e^{-2t}$ es solución

iii) $\dot{x} + 2x = 0$ $\quad x(t) = e^{-2t}$ es solución

1) Hallar una solución a $\dot{x} + 2x = 1 + e^{-2t}$

Respuesta: $x(t) = 1/2 + t\,e^{-2t}$

$* \ \dot{x} + 2x = 1$

$\dot{x} + 2x = e^{-2t}$ $*$

2) Hallar una solución a $\dot{x} + 2x = 2 + 3e^{-2t}$

Respuesta: $x(t) = 1 + 3t\,e^{-2t}$

3) Hallar la solución general a $\dot{x} + 2x = 1 = 1 + c \cdot 0$

Respuesta: $x(t) = 1/2 + c\,e^{-2t}$

Solución particular + homogénea

(E) $\dot{x} + px = q$

(EH) $\dot{x} + px = 0$

$$x(t) = x_p(t) + C\, x_h(t)$$

cte

solución particular de E

solución particular de EH

$$\dot{x} + px = q = q + C \cdot 0$$

x_p sol. cualquiera de $\dot{x} + px = q$

x_h sol. cualquiera de $\dot{x} + px = 0$

$\boxed{x_p + C x_h}$ es sol. de

$$\dot{x} + px = q + C \cdot 0$$
$$= q$$

Sol. particular + homogénea vs factor integrante

$$\dot{x} + px = q \qquad x(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t) q(t)\,dt + C\right]$$

$$\dot{x} + px = 0 \qquad = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t) q(t)\,dt + C \cdot \frac{1}{\mu(t)}$$

$$\frac{\dot{x}}{x} = -p$$

$$= \underbrace{x_h(t)\int \frac{q(t)}{x_h(t)}\,dt}_{x_p(t)} + C\, x_h(t)$$

$$x_h(t) = e^{-\int p(t)\,dt}$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}$$

$$x_h(t) = \frac{1}{\mu(t)} \qquad = x_p(t) + C\, x_h(t)$$

Ejemplos:

1) Cuenta de banco: t = tiempo (días)

$x(t)$ = cantidad de dinero en la cuenta. $\sin(t)$

$t + x$

tasa de interés $p(t)$

Obs: $\dot{x} - p(t,x)x = q(t,x)$

dejaría de ser lineal

tasa extracción / depósitos $q(t)$

$$x(t+\Delta t) = \underbrace{x(t)}_{\text{ya había}} + \underbrace{p(t)\,x(t)\Delta t}_{\text{gané por interés}} + \underbrace{q(t)\Delta t}_{\text{saco o pongo en la cuenta}}$$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = p(t)\,x(t) + q(t)$$

$$\dot{x} = p(t)\,x(t) + q(t)$$

$$\boxed{\text{Cuenta de banco: } \dot{x} - p\,x = q}$$

2) Sustancia radiactiva: t = tiempo (s)

$A(t)$ = cantidad sustancia

$$\dot{A} = -k_1 A \quad \text{con} \quad k_1 > 0$$

Solución $A(t) = A_0 e^{-k_1 t}$ $\qquad k_1 \neq k_2$

$A \rightsquigarrow B$ otra sustancia radiactiva con tasa $k_2 > 0$

$$\dot{B} = -k_2 B + k_1 A \quad , \quad \dot{B} + k_2 B = \overbrace{k_1 A_0 e^{-k_1 t}}$$

$$\dot{x} + 2x = 3e^{-8t}$$

3) Ley de enfriamiento de Newton

t = tiempo (s)

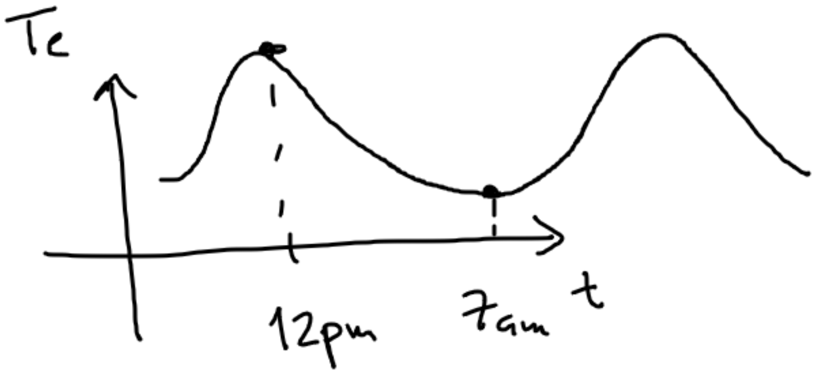
$T(t)$ = temperatura de un objeto

$T_e(t)$ = temperatura del entorno

$$\dot{T} = k\,(T_e - T) \qquad \text{con} \quad k > 0$$

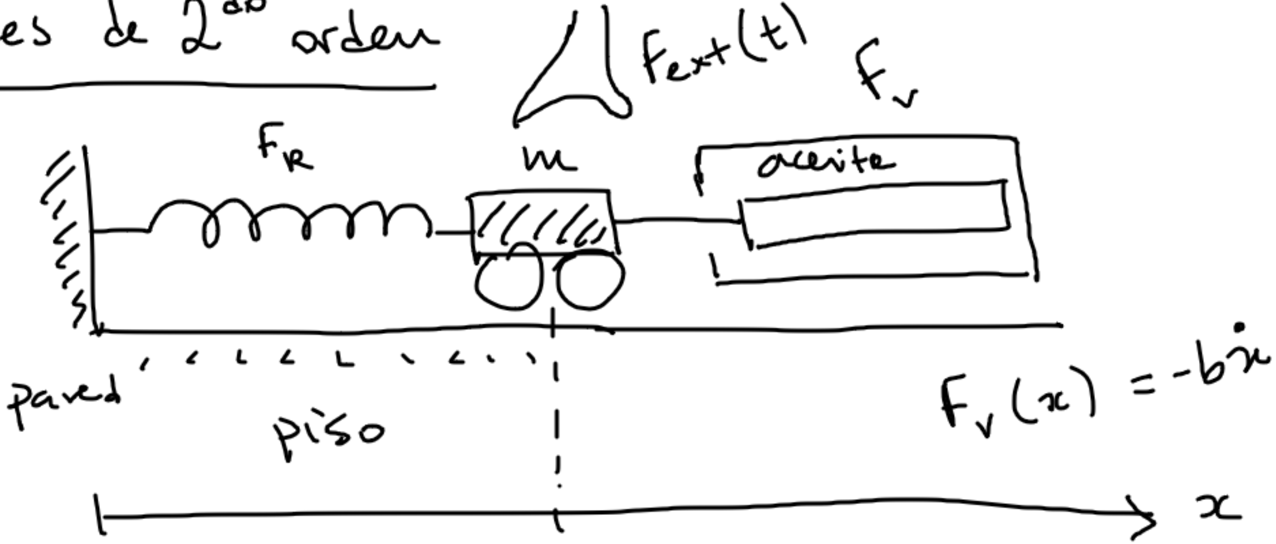
$$\dot{T} + kT = kT_e$$

$$\dot{T} + kT = C_1(\operatorname{sen}(\omega t) + C_2)$$



Ecuaciones lineales de 2^{do} orden

Ejemplo:



$F_v(x) = -b\dot{x}$

$F_R(x) = -kx$ $\quad x=0$ posición de equilibrio

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{ext}(t)$$

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}(t)}$$

k y b son constantes $\Rightarrow$ Ec. lin. 2^{do} orden a coef. constantes.

* También vale el principio de superposición.

* También vale $x(t) = x_p(t) + C x_h(t)$

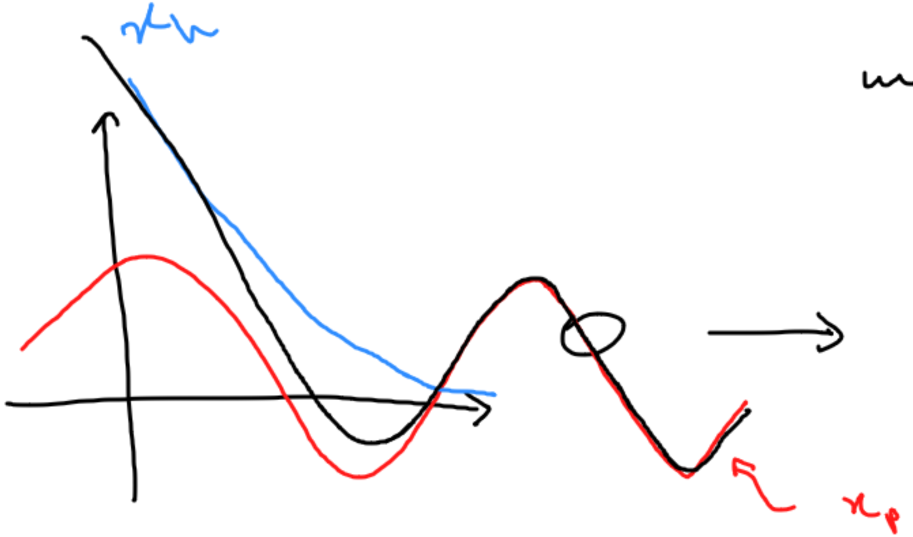
* Interpretación como sistema lineal

$$\downarrow \; x(0),\ \dot{x}(0)$$

$$(F_{ext}) \text{ input} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \text{output} \; (\text{Posición } x(t))$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$x(t) =$ solución est.
$+$ sol. transitoria
$(\to 0 \quad t \to \infty)$



$$\longrightarrow \boxed{} \longrightarrow x_h(t)$$

Ecuación homogénea: (Polinomio característico)

$$(EH) \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Modos: soluciones de la forma $\quad x(t) = Ae^{rt}$

$$\dot{x}(t) = rAe^{rt}$$

$$\ddot{x}(t) = r^2 Ae^{rt}$$

$$ar^2 \cancel{A}\cancel{e^{rt}} + br\cancel{A}\cancel{e^{rt}} + c\cancel{A}\cancel{e^{rt}} = 0$$

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

ecuación característica

Tres casos: (i) 2 raíces reales ($\neq$) (α, β)

(ii) 1 raíz doble (real) (α, α)

(iii) raíces complejas conjugadas $(\alpha \pm i\beta)$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Soluciones:

(i) $x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ $\quad \begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 \\ \dot{x}(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases}$

(ii) $x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 \overbrace{t e^{\alpha t}}^{\prime}$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = A \quad e^{At}$?

(iii) $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)$ (roto-homotecia)

Encontrar soluciones particulares:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}(t)$$

1) $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

$$x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

2) $F_{ext}(t) = F_0 e^{-kt}$

$$x_p(t) = A e^{-kt}$$

3) $F_{ext}(t) = t$, $x_p(t) = A + Bt$