Definición de una ecuación diferencial

es una ecuación que relaciona las derivadas de función con la función misma (y la variable de la función)

Función (variable) :

$x(t)$	$y(x)$	$f(u)$
x = función	y = función	f = función
t = variable	x = variable	u = variable

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Derivadas :

$x(t)$			
$\dot{x} = \dot{x}(t)$	$\ddot{x}$		$x^{(n)}$
$x' = x'(t)$	x''	...	
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dt}(t)$	$\dfrac{d^2x}{dt^2}$		$\dfrac{d^nx}{dt^n}$

Ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{F\left(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, x^{(1)}, x, t\right) = 0}$$

$$x^{(n)} = G\left(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x, t\right)$$

El orden de una ecuación: es el mayor orden de las derivadas que aparecen en la ecuación

1^{er} orden : $\boxed{\dot{x} = f(x,t)}$

2^{do} orden : $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, t)$

observación: toda ecuación es equivalente a una ecuación de 1^{er} orden, (aumentando la dimensión)

Ej: 2^{do} orden en $\mathbb{R}$ ~ 1^{er} orden en $\mathbb{R}^2$

Ejemplos: $\boxed{\dot{x} + \ddot{x} = 2t}$ ← no autónoma $\quad \ddot{x} = -\dot{x} + 2t$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 2t = 0$$

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = \underline{\ddot{x} + \dot{x} - 2t}$$

Ecuación → $\boxed{\text{autónoma}}$: la variable (t) no aparece en la ecuación

Ecuación → $\boxed{\text{no autónoma}}$

Ej: 1^{er} $\dot{x} = f(x)$

Clasificaciones:

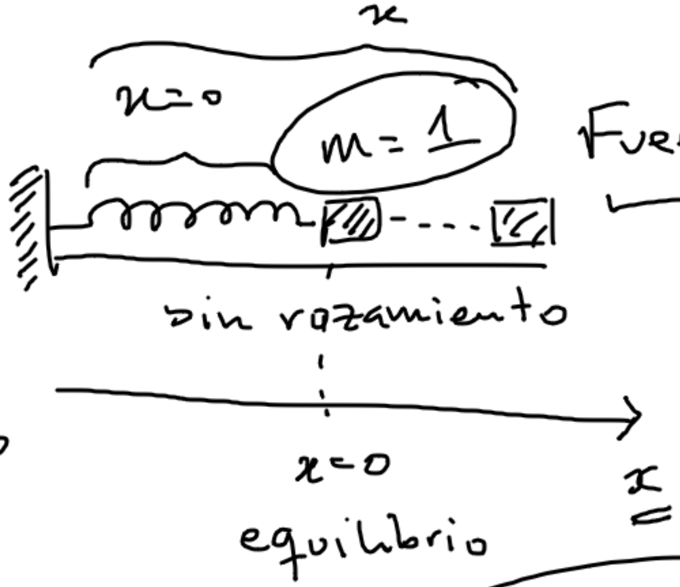
→ Lineales $\dot{x} + \ddot{x} = t^2$

→ Variables separables

$$\dot{x} = \underbrace{f(x)}\underbrace{g(t)}$$

Motivación:

1) Física: Resorte



$\text{Fuerta} = \underline{-kx}$

$F = ma$

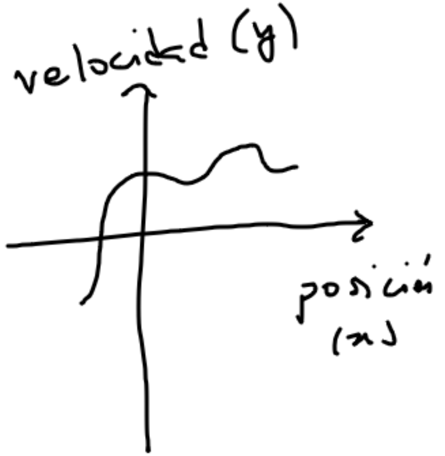
Ecuación del movimiento

$\underline{-kx = \ddot{x}}$

$t \mapsto \text{posición}(t)$

$\boxed{\ddot{x} = -kx}$

en $\mathbb{R}$, 2^{do} orden, autónoma, lineal



$\underline{y = \dot{x}}$, $\dot{y} = \ddot{x} = -kx$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

* 1^{er} orden, lineal, autónoma en $\mathbb{R}^2$,

$t \mapsto (\text{posición}(t), \text{velocidad}(t))$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

2) Economía: Modelo de Solow de crecimiento (modelo super simple).

t = tiempo en años

Y = cantidad anual de bienes producidos (dólares) (PBI) por K unidades de capital (maquinaria, instalaciones, etc) y por L unidades de fuerza laboral (trabajadores)

Función de producción $Y = F(K,L)$

Supuesto: $F(2K, 2L) = 2F(K,L)$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$$

Función de producción por trabajador:

y = producto/trabajador $= \dfrac{Y}{L}$

k = capital/trabajador $= \dfrac{K}{L}$

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = \underbrace{F(k,1)}_{f(k)}$$

$$\boxed{y = f(k)}$$

La ecuación diferencial de Solow

$$\underbrace{\{\text{tasa de cambio de capital}\}}_{\dot{k}} = \underbrace{\{\text{inversion en capital}\}}_{sy} - \underbrace{\{\text{gastos de reposición de capital}\}}_{\delta k}$$

$$sy = sf(k)$$

s = tasa ahorro

ahorro = sy = inversión

δ = tasa de depreciación

$$\boxed{\dot{k} = sf(k) - \delta k}$$

1er orden autónoma, no es lineal

$$\dot{k} = F(k)$$

Ejemplo: $f(k) = \sqrt{k}$

$s = 1/2$

$\delta = 1/10$

$$\boxed{\dot{k} = \frac{1}{2}\sqrt{k} - \frac{1}{10}k}$$

Definición de solución de una ecuación:

(E) $\dot{x} = f(x,t)$

Una solución de (E) es una función $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$

tal que

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t), t) \quad \forall t \in (a,b)$$

<u>Ejemplo de la ficha</u>: $\varphi(t) = e^{2t} + 2e^{-3t} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$

$\dot{\varphi}(t) = 2e^{2t} - 6e^{-3t} - 1/3$ (iii) $-\ddot{x} + \dot{x} - 6x = 2t$

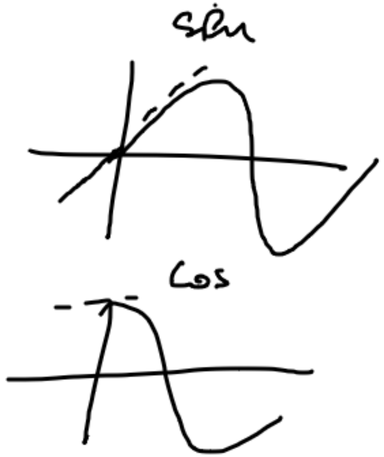
$\ddot{\varphi}(t) = 4e^{2t} + 18e^{-3t}$

$$-4e^{2t} - 18e^{-3t} + 2e^{2t} - 6e^{-3t} - 1/3 - 6e^{2t} - 12e^{-3t} + 2t - 2$$

$$-8e^{2t} - 36e^{-3t} + \cancel{2t} - (2 + 1/3) = \cancel{2t}\ 0$$

Ej: Resorte $\ddot{x} = -kx$

$$x = \underbrace{A}_{\text{amplitud}} \operatorname{sen}(\underbrace{w}_{\text{vel. angular}} t + \underbrace{\phi}_{\text{fase}})$$



$$\dot{x} = wA\cos(wt+\phi)$$

$$\ddot{x} = \cancel{-}w^2 \cancel{A}\, \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(wt+\phi)}} = -kx = \cancel{-}k \cancel{A}\, \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(wt+\phi)}}$$

$$w^2 = k \quad , \quad w = \sqrt{k}$$

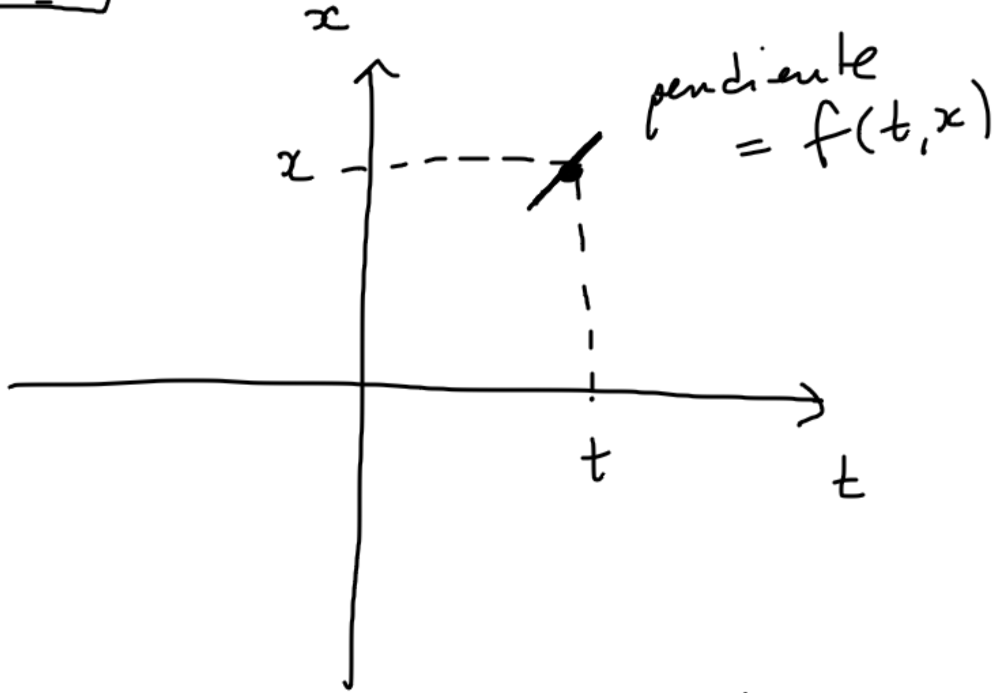
$$\varphi(t) = A \operatorname{Sen}(\sqrt{k}\, t + \phi)$$ es solución de $\ddot{x} = -kx$

Representación visual de una ecuación diferencial:

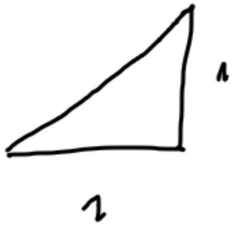
$$\dot{x} = \boxed{f(t,x)}$$

pendiente

Campo de pendiente



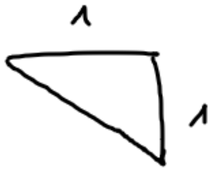
pendiente = 1



pendiente 2

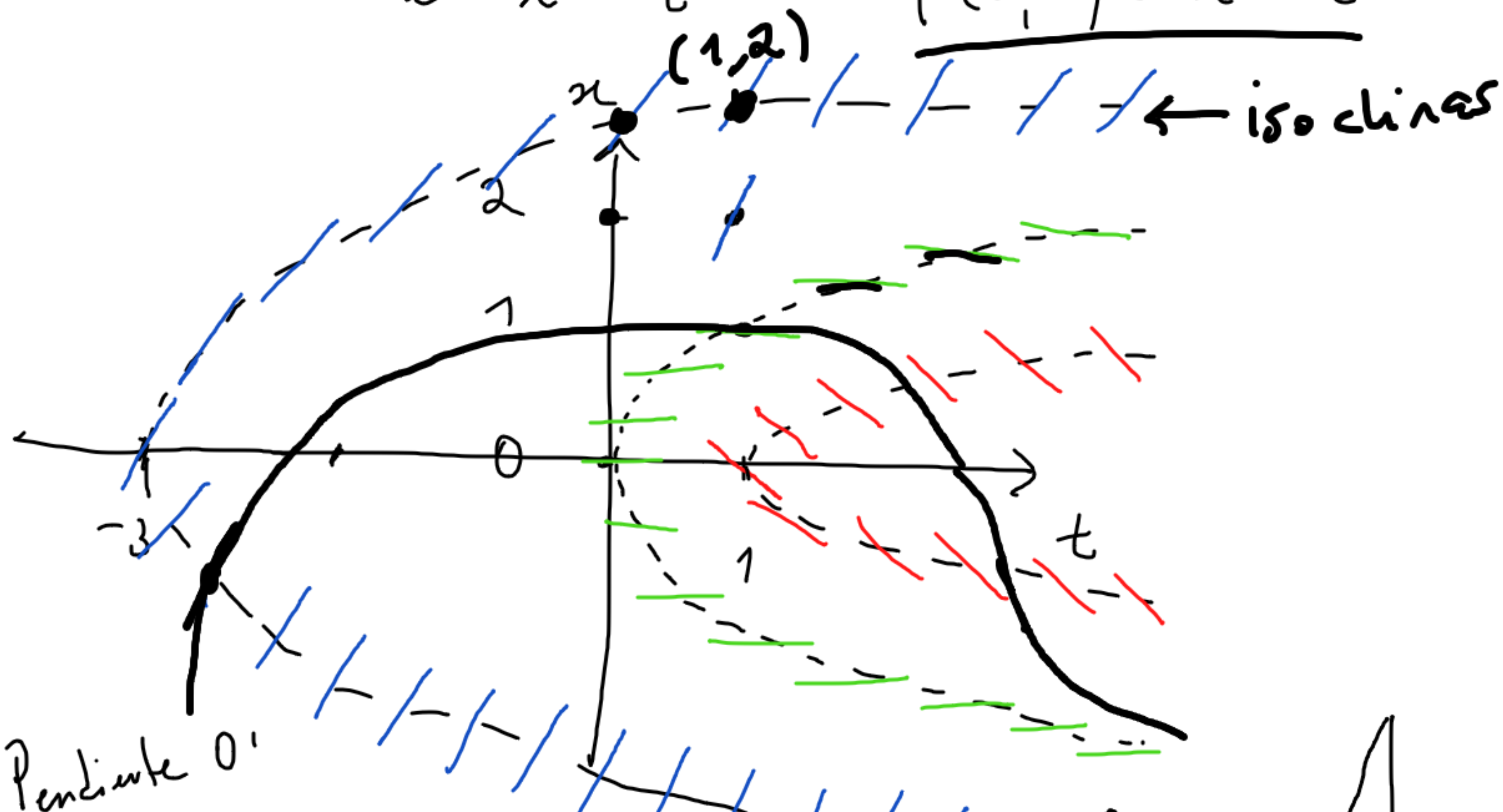
pendiente 1/2

pendiente − 1



Ejemplo:

$$\dot{x} = x^2 - t \qquad \underline{f(t,x) = x^2 - t}$$



$f(t,x)=0 \quad x^2-t=0 \quad x=\pm\sqrt{t} \qquad x^2-t=3 \quad x=\pm\sqrt{t+3}$

$f(1,1)=0$

$f(1,2)=3$

$f(1,0)=-1$