Práctico 6: Serie de Fourier, poner en youtube es una delicia.

Si $S < V$ con pi y $\{v_1, \dots, v_k\} \xrightarrow{\text{bon}} S$ entonces

$P_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i$ es el vector de S que mejor aproxima v.

En particular, si $S = V \Rightarrow v = P_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i \rangle v_i$

Resulta que esto vale aunque $\dim V = \infty$ (hay hipótesis)

Por ejemplo, $V = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx < \infty \} =: \mathcal{L}^2([0,2\pi])$

con pi: $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} fg \, dx$.

Resulta que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \xrightarrow{\text{bon}} \mathcal{L}^2$

y esto implica $f \in \mathcal{L}^2$ se puede escribir $f = \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} \langle f, f_i \rangle f_i}_{}$ ¿?

donde $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es la base que escribí arriba.

¿Serie de Fourier?

$$f = \underbrace{\lim_{n \to +\infty}} \sum_{i=0}^{n} \langle f, f_i \rangle f_i$$

¿En qué sentido? ¿Una sucesión de funciones que converge a f?

- Hay varias nociones de convergencias en espacios de funciones:

Convergencia puntual, uniforme, en $\mathcal{L}^2$, en $\mathcal{L}^p$, en probabilidad, casi segura, débil, convergencia en distribuciones, ...

Especial para Fourier.

Convergencia puntual: Sea $f_n : M \to \mathbb{R}^k$, y sea $f : M \to \mathbb{R}^k$, se dice que f_n converge puntualmente a f si

$$\forall x \in M, \ \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{} = f(x)$$

Sucesión de numeros reales.

Lo que es equivalente a:

$\forall x \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists \, n(x,\varepsilon)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \ \forall n > n_0.$

Ejemplo 1: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n.$

Fijo $x_0 \in [0,1]$, y miro la sucesión $x_0^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

$\Rightarrow \ f_n \xrightarrow{cp} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$ //.

Vimos graficamente que no convergía uniformemente.

Ejemplo 2: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} = P(2n+1, 0, \sin x).$$

Afirmo que "$\sin x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$", pero el $+\infty$ refiere a convergencia puntual, es decir "$f_n \xrightarrow{c.p} \sin(x)$", es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Vimos graficamente que no converge uniformemente

<u>Convergencia uniforme</u>: Si $f_n : M \to \mathbb{R}^k$ y $f : M \to \mathbb{R}^k$, se dice que $f_n \xrightarrow{cu} f$ si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tal que $\forall x \in M, \forall n \geq n_0, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>Prop</u>: $f_n \xrightarrow{cu} f$ sii $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| = 0}$.

<u>Obs</u>:

$\sup\limits_{x \in [0,1/2]} |x^n - 0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n]{} 0. \Rightarrow x^n : [0,1/2] \to \mathbb{R}$

$x \in [0, 1/2]$

Converge uniformemente a 0.

1 a) $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{n}$, con $x \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$!!

- $\forall x \in M, \ \frac{\sin(x)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{cp} 0$.

- ¿Uniformemente? $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{\sin(x)}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{cu} 0$. $\left[f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \right]$.

1d) $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.

▶ $\forall x \in [1,2]$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{(x+1)^n} = \dfrac{x}{\infty} = 0$. $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{cp} 0$.

▶ ¿Converge uniformemente? $\sup_{x\in[1,2]} \left| \dfrac{x}{(x+1)^n} - 0 \right| = \sup_{x\in[1,2]} \dfrac{x}{(x+1)^n}$

Si $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+1)^n} \Rightarrow f_n'(x) = \dfrac{(x+1)^n 1 - x\, n(x+1)^{n-1}}{(x+1)^{2n}} = \dfrac{(x+1)^{n-1} \cdot [x+1-nx]}{(x+1)^{2n}}$

Como $x \in [1,2]$, si $n>3 \Rightarrow x+1-nx < 0 \Rightarrow f_n'(x) < 0$

f_n viene decreciendo $\Rightarrow \sup_{x\in[1,2]} \dfrac{x}{(x+1)^n} \underset{x=1}{=} \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

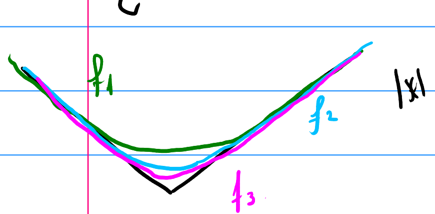
$\Rightarrow \dfrac{x}{(x+1)^n} \underset{[1,2]}{\rightrightarrows} 0$.

Teo: Si $f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ con $f_n \rightrightarrows f$, $f : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

y f_n es continua $\forall n \Rightarrow f$ es continua.

* ¿En las mismas hipótesis pero con f_n derivables además, se cumple que f es derivable?

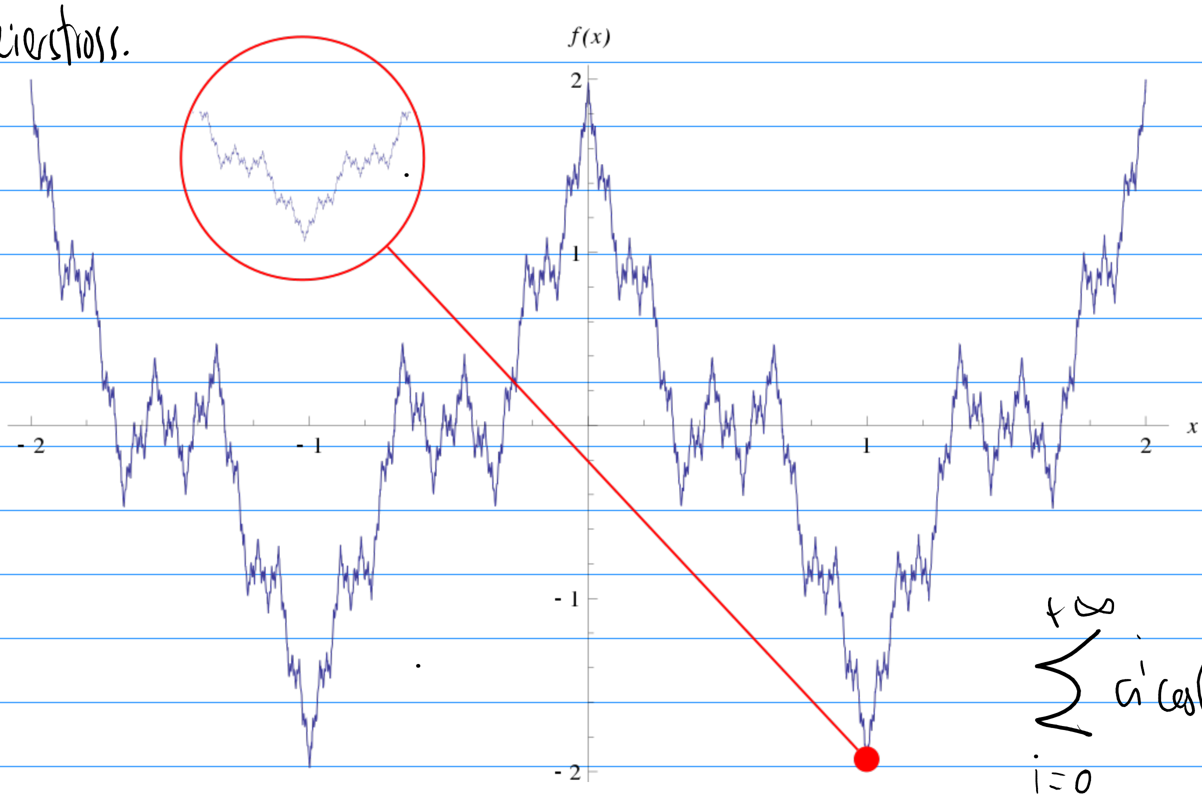
No:

• 

- $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a^i \cos(b^i \pi x)$ con $0<a<1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Se cumple que $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, converge uniformemente a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [Se sigue que f es continua].

Sin embargo, f no es derivable en ningún punto !!! Se llama función de Weierstrass.



$$\sum_{i=0}^{+\infty} a^i \cos(b^i \pi x)$$