Def: $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación diferencial $\dot{x}=f(x)$. Un punto $\bar{x}\in\Omega$ es de equilibrio si $f(\bar{x})=0$. Decimos que

- $\bar{x}$ es estable si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \|\varphi_{x_0}(t)-\bar{x}\|<\varepsilon\ \forall t>t_0$
  $[\varphi_{x_0}: I(x_0)\to\mathbb{R},\ I(x_0)\supset[0,+\infty)]$
- $\bar{x}$ es asintóticamente estable si es estable y además $\exists\delta>0$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\varphi_{x_0}(t)=\bar{x}$.
- $\bar{x}$ es inestable si no es estable

Lyapunov:

- Necesito $V: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(0,0)\in U$ de equilibrio y además

1) $(x,y)=(0,0)$ sea un mínimo estricto

2) $\dot{V}: U\to\mathbb{R}$,
   - $\dot{V}(x)<0\ \forall x\in U-\{(0,0)\}$ (Lyap 2)
   - $\dot{V}(x)\leq 0\ \forall x\in U$ (Lyap 1).

Teorema (Cetaev)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

1). $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $U-\{\bar{x}\}$ con $x_n\xrightarrow{n\to+\infty}\bar{x}$ y $V(x_n)\leq V(\bar{x})$

2). $\dot{V}(x)<0\ \forall x\in U-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable.

Prop

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U \subset \Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V: U \to \mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en $\bar{x}$
- $\dot{V} > 0 \quad \forall x \in \Omega - \{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable

Teorema de Hartman-Großman

Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función de clase C^1 y $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Entonces

1) Si todos los valores propios de $Jf(\bar{x})$ tienen parte real negativa entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable

2) Si $J\_(\bar{x})$ tiene un valor propio positivo $\Rightarrow \bar{x}$ es inestable

Convergencia puntual: Se dice $f_n: M \to \mathbb{R}^n$ converge a $f: M \to \mathbb{R}^n$, y se denota $f_n \xrightarrow{c.p} f$, si $\forall x \in M$, $f_n(x) \to f(x)$.

Es decir, $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x)$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Convergencia uniforme: Se dice que $f_n: M \to \mathbb{R}^n$ converge uniformemente a $f: M \to \mathbb{R}$, y se denota $f_n \xrightarrow{c.u} f$, si

$\forall \varepsilon \ \exists n_0$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in M$

Depende solo de ε sirve para todas las x en M.

Prop: Si $f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sucesión de funciones continuas y $f_n \xrightarrow{cu} f$, $f : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Entonces $f : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es continua.

Prop Sea $f_n : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 y una función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si se cumple que

1. $f_n' \xrightarrow{cu} g$
2. $\exists x_0 \in (a,b)$, $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Entonces existe $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 tal que $f_n \rightrightarrows f$ y $f' = g$.

Prop: Sea una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sean $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F_n(x) = \int_a^x f_n(s)\,ds$ y $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ entonces

1. F_n converge uniformemente a F en $[a,b]$.
2. $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx$.

Teo (Criterio del Mayorante) Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Supongamos que existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq A_n$ $\forall n, \forall x \in M$. y además que $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} A_n$ converge.

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en M.

Serie de Fourier de f, 2L-periódica: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$, $b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx$.

Igualdad de Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx =: \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Teorema (Dini)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua a trozos, 2L-periódica y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \quad , \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-$$

Entonces, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

$\dot{V}(x,y) = -x^2 - y^2 + xy < 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \det > 0 \\ \rightarrow tr = -2 \end{matrix} \Bigg\} \text{ Dos valores propios de signo negativo}$$

$$f(x,y) = -x^2 + y^3 \rightsquigarrow H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = -x^2$$

Ejercicio 1 (1 punto: 0.5 cada parte)

Sea $f(x) = \sin(\pi x)$.

1. Si $f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)}$, para todo $x \in (0,1)$, entonces

   Serie de Fourier tipo coseno de f.

   A) $a_n = \frac{\pi}{n^2}$

   B) $a_n = \frac{-4\pi}{n(n+1)^2}$

   C) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{-4}{\pi(n+1)(n-1)} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

   ↳ Dini

   ↳ Parsevall.

   D) $a_n = \frac{4\pi^2}{n^2(n-1)}$

   E) $a_n = \frac{4}{\pi(n+1)^2}$

2. La suma $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots$ es igual a:

$$\sum_{k}^{+\infty} \frac{-4 \cdot 1}{\pi(2k+1)(2k+3)} \cos(2k\pi x)$$

ext par de $\sin(\pi x)$, $0 < x < 1$.

$$\sum_{k}^{+\infty} a_k^2 = \|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx$$

$$\dot{V}(x,y) = -x^2 - y \cdot \sin y.$$

$$\sim \simeq -x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow ✓$$

Resto de orden 1 de Taylor.

$$\dot{V}(x,y) = -x^2 - y(y + R_1(y))$$

$$= -x^2 - y^2 - yR_1(y) = -x^2 - y^2 - R_2(y)$$

$$0 \Rightarrow H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La derivada segunda es cero

• $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \underbrace{(x^2 + x^3)}_{\simeq x^2} \simeq \frac{1}{2}x^4$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^4 - x^3}$$

* $V(x,y) = -\cos x + y^2 + \frac{1}{4}xy$, • $\nabla V(x,y) = (+\sin x + \frac{1}{4}y, 2y + \frac{1}{4}x$

• $HV(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\quad \nabla V(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ V tiene un mínimo local estricto en $(x,y) = (0,0)$

$\Rightarrow V(x,y) > V(0,0) = -1 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$\dot{V}(x,y) = \ldots\ldots\ldots < 0 = \dot{V}(0,0)$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(k\pi x) \cdot \left(A_k \sin\left(\sqrt{k^2\pi^2 - \tfrac{1}{4}}\, t\right) + B_k \cos\left(\sqrt{k^2\pi^2 - \tfrac{1}{4}}\, t\right)\right) e^{-t/2}$$

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\pi x) \rightsquigarrow$$

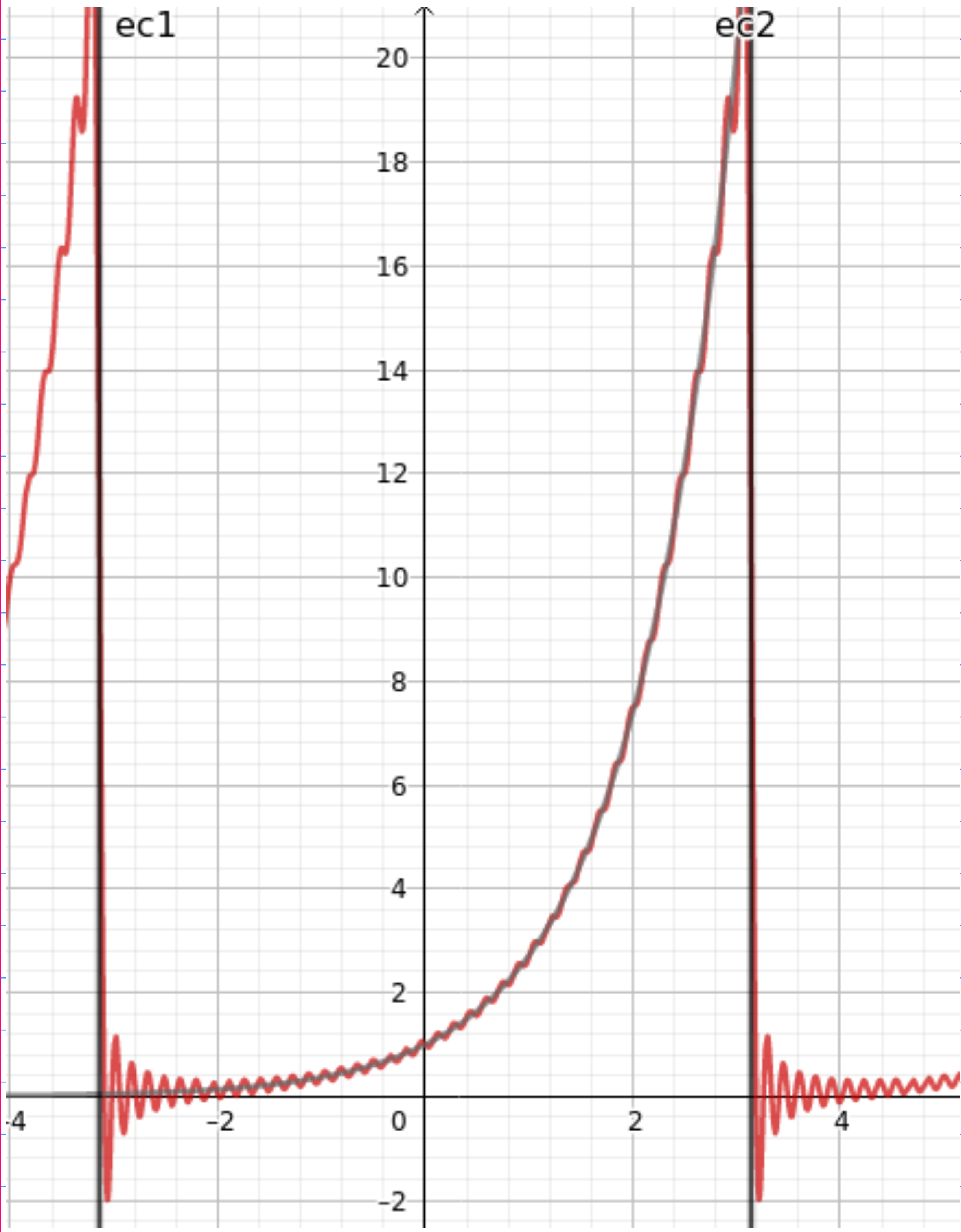
B_k coef de Fourier tipo seno de $u_0(x)$, $x \in [0,1]$.

$$V_0(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x) \left(A_k \sqrt{k^2\pi^2 - 1/4} \cos(0)\, e^{-0/2} + B_k \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) e^{-0/2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left(A_k \sqrt{k^2\pi^2 - 1/4} - \frac{B_k}{2} \right)}_{= C_k} \sin(k\pi x)$$

Si C_k son los coeficientes de Fourier tipo seno de $V_0(x)$, $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow A_k = \frac{C_k + \frac{B_k}{2}}{\sqrt{k^2\pi^2 - 1/4}}$$



ec1
ec2
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-2
0
2
4