Ejercicio 1 : a) $\overline{u_{tt} - u_{xx} = x\sin t}$, $(x,t) \in D = (0,\pi)\times\mathbb{R}$

Hallar una solución particular $u_0(x,t)$ de la forma $f(x)\sin t + g(x)$ tal que f y g cumplen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = -1$.

$$\partial_t^2 u = -f(x)\sin t \qquad \Rightarrow \quad -f(x)\sin t - \left(f''(x)\sin t + g''(x)\right) = x\sin t$$

$$\partial_x^2 u = f''(x)\sin t + g''(x) \qquad \Rightarrow \quad \sin t\left(-f(x) - f''(x)\right) - g''(x) = x\sin t$$

$$\begin{cases} +f(x) + f''(x) = -x \\ g''(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - x \\ g(x) = ax + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = B\sin(x) - x & (f(0) = 0) \\ g(x) = -x & (a = -1,\ b = 0 \text{ ya que } g'(0) = -1,\ g(0) = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x & (f'(0) = -1,\ f(0) = 0) \\ g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_0(x,t) = -x\sin t - x$$

b) Hallar una solución u tal que cumpla

* $u_{tt} - u_{xx} = \underline{x\sin t}$, $(x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}$
* $u(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$, $x \in [0,\pi]$
* $u_t(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in [0,\pi]$
* $u(0,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ y $\underline{u(\pi,t) = -\pi\sin t - \pi}$, $t \in \mathbb{R}$

* u de clase C^2 en $(0,\pi)\times\mathbb{R}$ y continua en $[0,\pi]\times\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \overbrace{-x\sin t - x}^{u_0(x,t)} + \overbrace{v(x,t)}^{?}$$

- $x\sin t = u_{tt} - u_{xx} = (u_{0_{tt}} - u_{0_{xx}}) + (v_{tt} - v_{xx}) = x\sin t + (v_{tt} - v_{xx})$

$\Rightarrow \quad v_{tt} - v_{xx} = 0$

- $v(0,t) = u(0,t) - u_0(0,t) = 0 - 0 = 0 \quad \forall t$

$v(\pi,t) = u(\pi,t) - u_0(\pi,t) = (-\pi\sin t - \pi) - (-\pi\sin t - \pi) = 0$

- $v(x,0) = u(x,0) - u_0(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4} - (-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$

- $v_t(x,0) = u_t(x,0) - u_{0_t}(x,0) = \left(-x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\right) - (-x)$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

Teorema 0.3.

Sea $v(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *y* $v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *las condiciones iniciales del problema (0.10).*

Si

$$|b_k| < \frac{M}{k^4} \qquad |b'_k| < \frac{N}{k^3} \qquad N, M \in \mathbb{R}$$

$c = 1$

$L = \pi$

entonces:

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B_k sen\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)}$$

Sol. de variables separables.

con $A_k = b_K$ *y* $B_k = b'_k \frac{L}{k\pi c}$ *es solución al problema (0.10).*

$\downarrow$

Eq de ondas con bordes quietos

Usando el teorema, la función

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)}$$

es solución.

* Si quiero llegar a la solución que propone el teorema hago variables separables

* Si quiero probar que efectivamente es solución el gran problema es ver que es derivable y vale pasar la derivada para adentro:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx) \cdot \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right)$$

- $$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \cdot \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right)$$

- $$\partial_t S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \cdot \left(-\frac{1}{k^3} \sin(kt) + \frac{1}{k^3} \cos(kt) \right)$$

Observación: $S_n(x,t)$ y $\partial_t S_n(x,t)$ convergen uniformemente ya que

$S_n(x,t)$: $\left| \sin(kx) \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right) \right| \leq \frac{2}{k^4}$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^4} < +\infty$

entonces el mayorante de Weierstrass me asegura la convergencia uniforme de $S_n(x,t)$

$\partial_t S_n(x,t)$: $\left| \sin(kx) \left(-\frac{1}{k^3} \sin(kt) + \frac{1}{k^3} \cos(kt) \right) \right| \leq \frac{2}{k^3}$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} < +\infty$

entonces el mayorante de Weierstrass me asegura la convergencia uniforme de $\partial_t S_n(x,t)$

Como $S_n(x,t)$ y $\partial_t S_n(x,t)$ convergen uniformemente entonces

$$V(x,t) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(kx) \cdot \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right)$$

es derivable respecto a t y además

$$\partial_t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(kx) \cdot \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \partial_t \left(\sin(kx) \cdot \left(\frac{1}{k^4} \cos(kt) + \frac{1}{k^4} \sin(kt) \right) \right)$$

Análogamente puedo hacer lo mismo para $\partial_t^2, \partial_x, \partial_x^2$

[Ya no puedo con derivadas terceras].

Ahora es un toque verificar que es solución: $v_k(x,t) = \sin(kx)\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)$

$$\partial_t^2 v = \partial_t^2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x,t)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t^2 (v_k(x,t)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_x^2 (v_k(x,t))$$

$$= \partial_x^2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x,t)\right) = \partial_x^2 v.$$

- $$v(0,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sin(kx)\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)\Big|_{x=0}\right) = 0$$

- $$v(\pi,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sin(kx)\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)\Big|_{x=\pi}\right) = 0$$

- $v(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^4}$. que es el perfil que me pedían.

- $$v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t\left(\sin(kx)\cdot\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx)\cdot\left(-\frac{1}{k^3}\sin(kt) + \frac{1}{k^3}\cos(kt)\right)\Big|_{t=0}$$

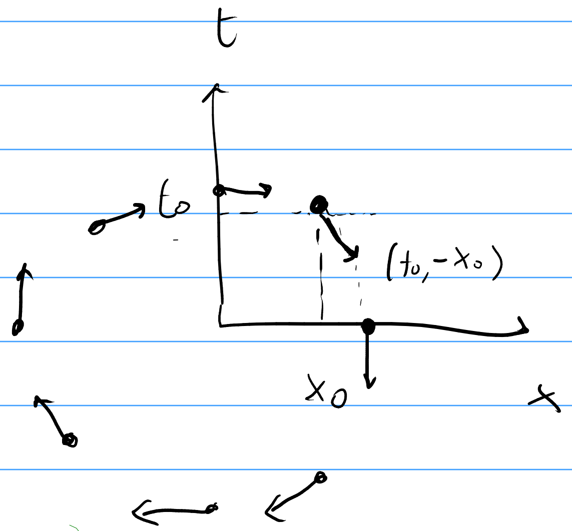
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k^3} \quad \checkmark$$

Se concluye que $u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$ es solución al problema original.

$$u(x,t) = -x\sin t - x + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx)\left(\frac{1}{k^4}\cos(kt) + \frac{1}{k^4}\sin(kt)\right)$$

$$t\,u_x - x\,u_t = 0 \Leftarrow \langle \underbrace{(u_x, u_t)}_{\nabla u}, (t,-x) \rangle = 0$$

$$(x,t) \longmapsto (t,-x)$$



$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos((2k+1)x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}\cos(kx)$$

$$= \frac{-1}{3\pi}\cos(3x) + \frac{1}{5\pi}\cos(5x) - \frac{1}{7\pi}\cos(7x) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi}\cos(x)$$