Ejercicio 5

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ \partial_x u(0,t) = 0, \ \partial_x u(\pi,t) = 0 & \forall t>0 \\ u(x,0) = x, & x \in [0,\pi] \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) & \text{y continua en } [0,\pi]\times[0,+\infty) \end{cases}$$

Busqueda de soluciones:

* Método de variables separables: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

u satisface la EDP $\Leftrightarrow$ $X(x)\cdot T'(t) = X''(x)\,T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \quad \text{constante}$$

Recordar $\partial_x u(0,t) = 0 \ \forall t>0 \Leftrightarrow X'(0)\,T(t) = 0 \ \forall t>0 \rightarrow \boxed{X'(0) = 0}$

$\rightarrow \cancel{T(t) = 0, \ \forall t>0}$ ($u \equiv 0 \Rightarrow$ NO).

$\partial_x u(\pi,t) = 0 \ \forall t>0$, análogamente esto implica $\boxed{X'(\pi) = 0}$

Caso $\mu>0$: $X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$, pero $X'(0) = X'(\pi) = 0$

$\Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$ NO.

Caso $\mu=0$: $X(x) = Ax+B$, $X'(x) = A$, $X'(0) = X'(\pi) = 0$

$\Rightarrow A = 0$. Entonces $X(x) = B$.

Además $\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu = 0 \Rightarrow T(t) = C$ constante

$$\Rightarrow \underset{\uparrow_{\mu=0}}{u_0}(x,t) = BC.$$

Caso $\mu<0$: $\quad \mu=-\alpha^2$, $\quad X_\alpha(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + \underline{B_\alpha \sin(\alpha x)}_{0}$

$X'_\alpha(x) = -\alpha A_\alpha \sin(\alpha x) + \alpha B_\alpha \cos(\alpha x)$; $\quad X'_\alpha(0) = 0 \Rightarrow B_\alpha = 0$.

$\Rightarrow X'_\alpha = -\alpha A_\alpha \sin(\alpha x)$. $\quad X'_\alpha(\pi) = 0 \Leftrightarrow -\alpha A_\alpha \cdot \sin(\alpha\pi) = 0$

$\cancel{A_\alpha = 0}$ $\quad (u_\alpha \equiv 0)$

$\alpha\pi = k\pi \longrightarrow \quad X_k(x) = A_k \cdot \cancel{\sin}^{\cos}(kx)$, $\quad \mu = -k^2$, $\alpha = k$.

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu = -k^2 \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$$

$$\Rightarrow u_k(x,t) = A_k \cdot \cos(kx)\, C_k e^{-k^2 t} = \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$$

En resumen: Tengo una solución para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de la forma

$u_k = \tilde{A}_k \cdot \cos(kx) e^{-k^2 t}$, $k \geq 1$, $\quad u_k = \frac{\tilde{A}_0}{2}$ si $k=0$.

BC

- Para poder cumplir la condición sobre $u(x,0)$, considero la serie de estas soluciones:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \frac{\tilde{A}_0}{2}$$

[Es un candidato, no sé si es solución].

¿Cuánto deberán valer los coeficientes?

$$\underset{\sqcup}{x} = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cdot \cos(kx) + \frac{\tilde{A}_0}{2}, \quad x \in [0,\pi]$$

$\Rightarrow \{\tilde{A}_k\}$ son los coeficientes de la serie de Fourier de tipo coseno de $f(x)=x$ en $[0,\pi]$.

$$\Rightarrow \tilde{A}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{k^2} \quad \text{si } k\geq 1$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Mi candidato es

$$(\ast)\qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right]\cdot\cos(kx)e^{-k^2t} + \frac{\pi}{2}$$

TERMINAMOS DE BUSCAR SOLUCIONES ✓

* Chequeo de soluciones: veamos que $(\ast)$ es una solución efectiva.

Es decir, veamos que se cumple:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & (x,t)\in(0,\pi)\times(0,+\infty) \quad (1)\\ \partial_x u(0,t)=0,\ \partial_x u(\pi,t)=0 & \forall t>0 \quad (2)\\ u(x,0)=x, & x\in[0,\pi] \quad (3)\\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) & \text{y continua en } [0,\pi]\times[0,+\infty) \quad (4)\end{cases}$$

(0) ¿Está bien definida? ¿Converge la serie?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right]\cdot \cos(kx)e^{-k^2t} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{k^2} < \infty$$

$(x,t)\in[0,\pi]\times[0,+\infty)$

Por el Mayorante de Weierstrass, la Serie Converge uniformemente en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$

Nuestro candidato u esta definido como la función límite de esta serie.

$\Rightarrow u:[0,\pi]\times[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ es continua [Parte del 4]

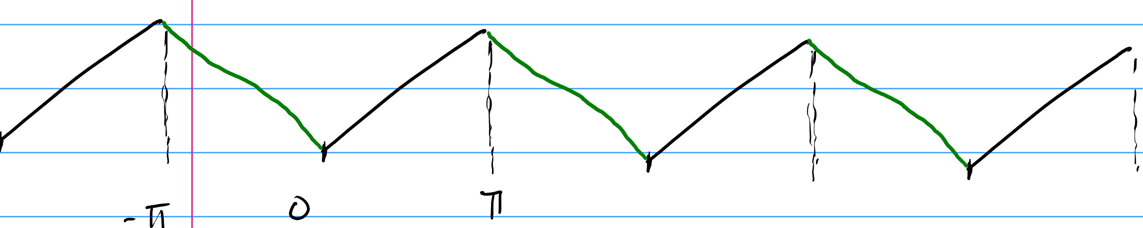
[Recordar, Sucesion de funciones continuas converge uniformemente a una función continua.]

(3) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{((-1)^k-1)}{k^2}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\cos(kx) + \pi/2 = x$

Converge puntual

Teorema de Dini (*)

(*) Si la función es continua y derivable a trozos entonces la serie de Furier converge puntualmente a la función.



(4) u es de clase C^2 en $(0,\pi)\times(0,+\infty)$. | Yo sé que es continua en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

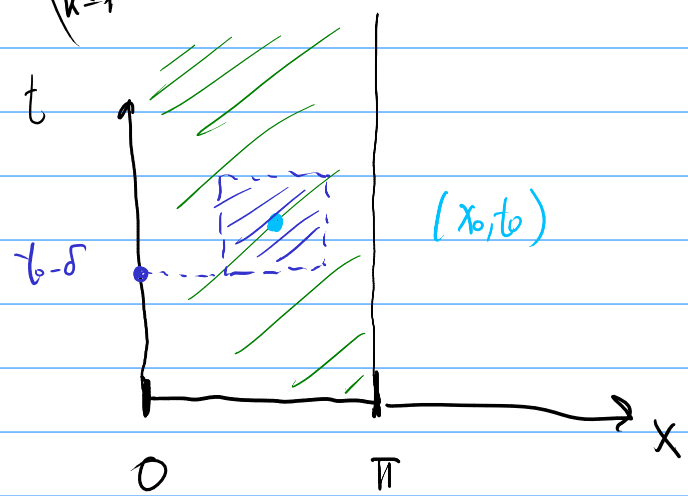
* Si $S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2$ Converge uniformemente ✓

$\partial_t S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$ Converge uniformemente

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2$ es derivable respecto a t

y $\partial_t \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t \left(\tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} \right)$

El dominio



Voy a probar que es derivable en $[0,\pi]\times(0,+\infty)$

Tomo $(x_0,t_0) \in [0,\pi]\times(0,+\infty)$, sea U un abierto como en el dibujo

Voy a probar que $\partial_t S_n(x,t)$ converge uniformemente en U.

$$\partial_t S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$$

$$\Big| -k^2 \underbrace{\tilde{A}_k}_{\leq m} \underbrace{\cos(kx)}_{\leq 1} e^{-k^2 t} \Big| \underset{\text{en } U.}{\leq} M \cdot k^2 \cdot e^{-k^2(t_0 - \delta)},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m \cdot k^2 \cdot e^{-k^2(t_0-\delta)} = \sum_{k=1}^{+\infty} m\, k^2 \cdot \Big(\underbrace{e^{-(t_0-\delta)}}_{<1}\Big)^{k^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ Por el mayorante, $\partial_t S_n(x,t)$ converge uniformemente en U.

- $\partial_t S_n(x,t)$ converge unif en U
- $S_n(x,t)$ converge unif en U

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2$ es derivable en U respecto a t y

$$\partial_t \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right) \underset{\text{en } U.}{\overset{*}{=}} \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t \left(\tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right)$$

[En particular es derivable en (x_0,t_0), como quería probar].

Como (x_0,t_0) es arbitrario $\Rightarrow$ este resultado vale en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$.

* El mismo razonamiento sirve para $\partial_t^2, \partial_x, \partial_x^2$ $\Rightarrow$ u es de clase C^2 en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$. Además vale pasar la derivada para adentro.

(1) $$\partial_t u = \partial_t \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t \left(\tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_x^2 \left(\tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right)$$

Por lo visto recién,

$$= \partial_x^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right) = \partial_x^2 u(x,t).$$

$(x,t) \in [0,\pi] \times (0,+\infty)$

(2) $$\partial_x u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_x \left(\tilde{A}_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -\tilde{A}_k \cdot k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

$$\partial_x u(0,t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cdot k \cdot \sin(0) e^{-k^2 t} = 0$$

$t > 0$

$$\partial_x u(\pi,t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{A}_k \cdot k \underbrace{\sin(k\pi)}_{0} e^{-k^2 t} = 0$$

---

*) CLASE QUE VIENE, EL ÚLTIMO.