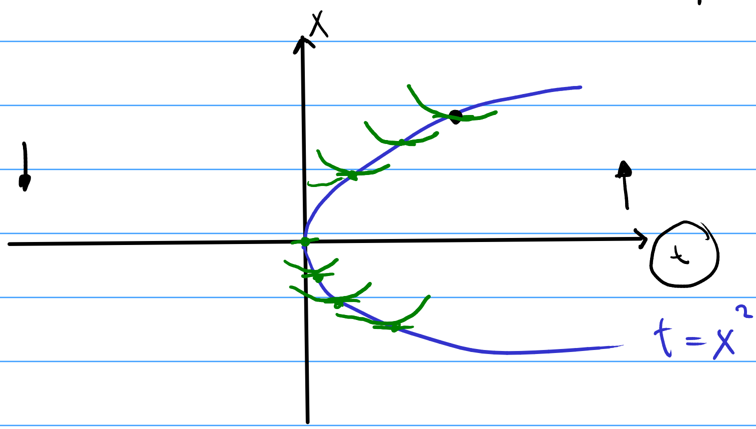
12. Estudiar $\dot{x} = t - x^2$,

a) Hallar máximos y mínimos y puntos de inflexión

- Puntos de equilibrio: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = x_0\ \forall t$ es solución $\Leftrightarrow$ $f(x_0,t)=0\ \forall t$ | No hay
- Signo $\dot{x}$ =

$t - x^2 = 0$

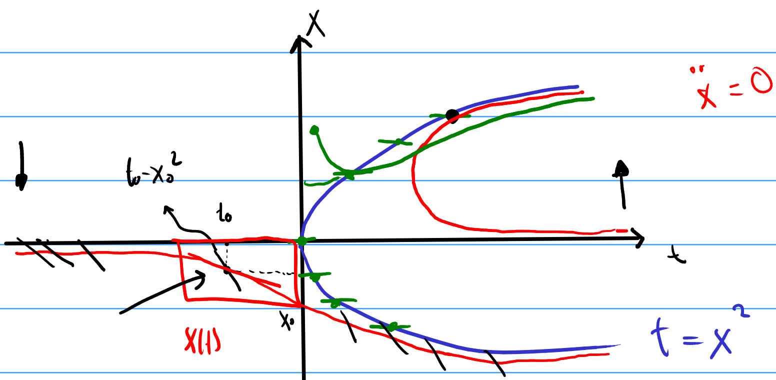
$t = x^2$



Si una solución tiene un extremo debe estar en la curva azul
Pero además si una solución alcanza en lo azul $\Rightarrow$ viene de afuera y se mete para adentro de la parábola: ya que la pendiente es transversal a la curva azul $\Rightarrow$ La derivada de la solución cambia de signo. De ⊖ a ⊕.

$$\ddot{x} = (\dot{x})^{\cdot} = (t - x^2)^{\cdot} = 1 - 2x\cdot\dot{x} = 1 - 2x(t - x^2) = 1 - 2xt + 2x^3$$

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2xt + 2x^3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2x} + x^2$$



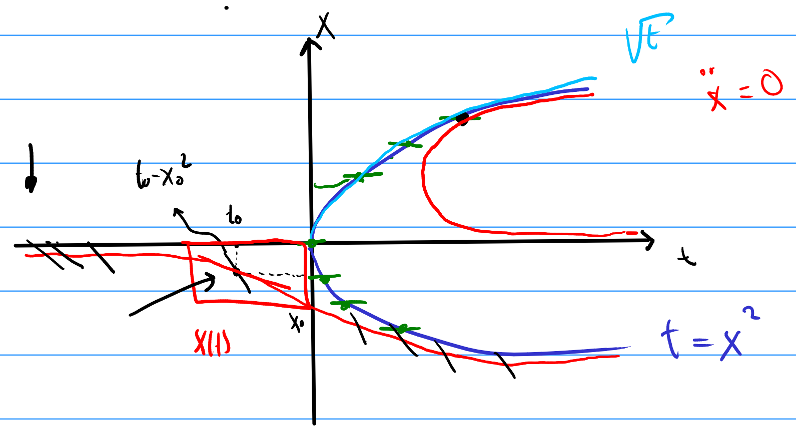
$t = \frac{1}{2x} + x^2$

$$\frac{dt(x)}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + 2x, \quad \underbrace{\frac{dx(t_0)}{dt}}_{\text{Pendiente roja}} = \frac{1}{\frac{dt(x)}{dx}\Big|_{x(t_0)}} = \frac{1}{2x_0 - \frac{1}{2x_0^2}} = \frac{1}{\frac{1}{t_0 - x_0^2} - \frac{1}{2x_0^2}} > \frac{1}{\frac{1}{t_0 - x_0^2}} = t_0 - x_0^2 = \text{Pendiente negra}$$

$t_0 = \frac{1}{2x_0} + x_0^2$

Los soluciones cruzan lo rojo $\Rightarrow$ son puntos de inflexión.

b) Demostrar que para toda solución $\varphi = \varphi(t)$ $\exists\ T \geq 0$ tal que $\varphi(t) < \sqrt{t}\ \ \forall t \geq T$.



- Si $\varphi(0) \geq 0 \Rightarrow$ en algún momento T se mete en la parábola y no vuelve a salir

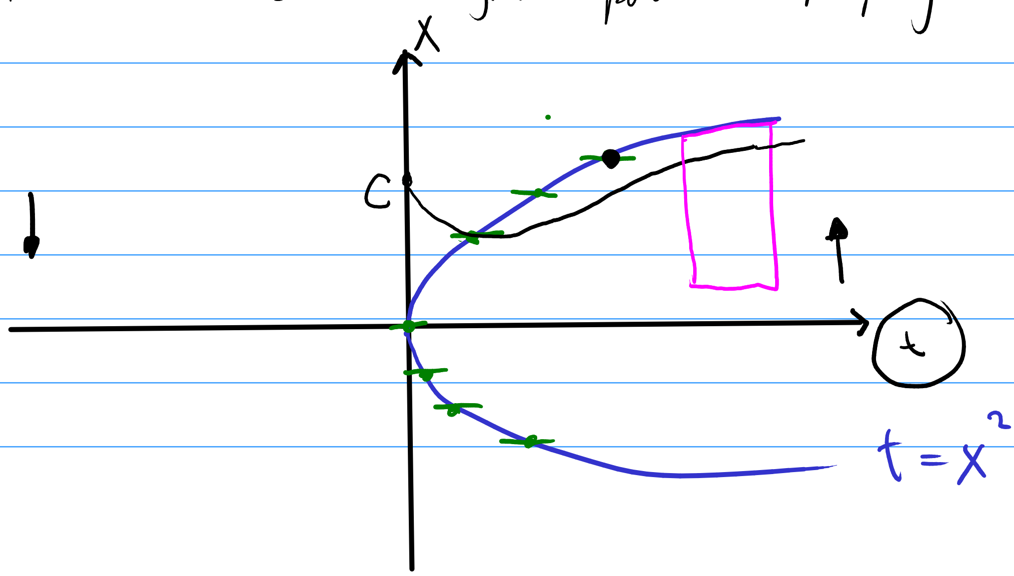
$-\sqrt{t} < \varphi(t) < \sqrt{t}\ \ \forall t > T$.

- Si $\varphi(0) < 0$, en este caso vimos que la solución no puede cortar $x = \sqrt{t}$

$\Rightarrow \varphi(t) < \sqrt{t}\ \ \forall t \geq 0$.

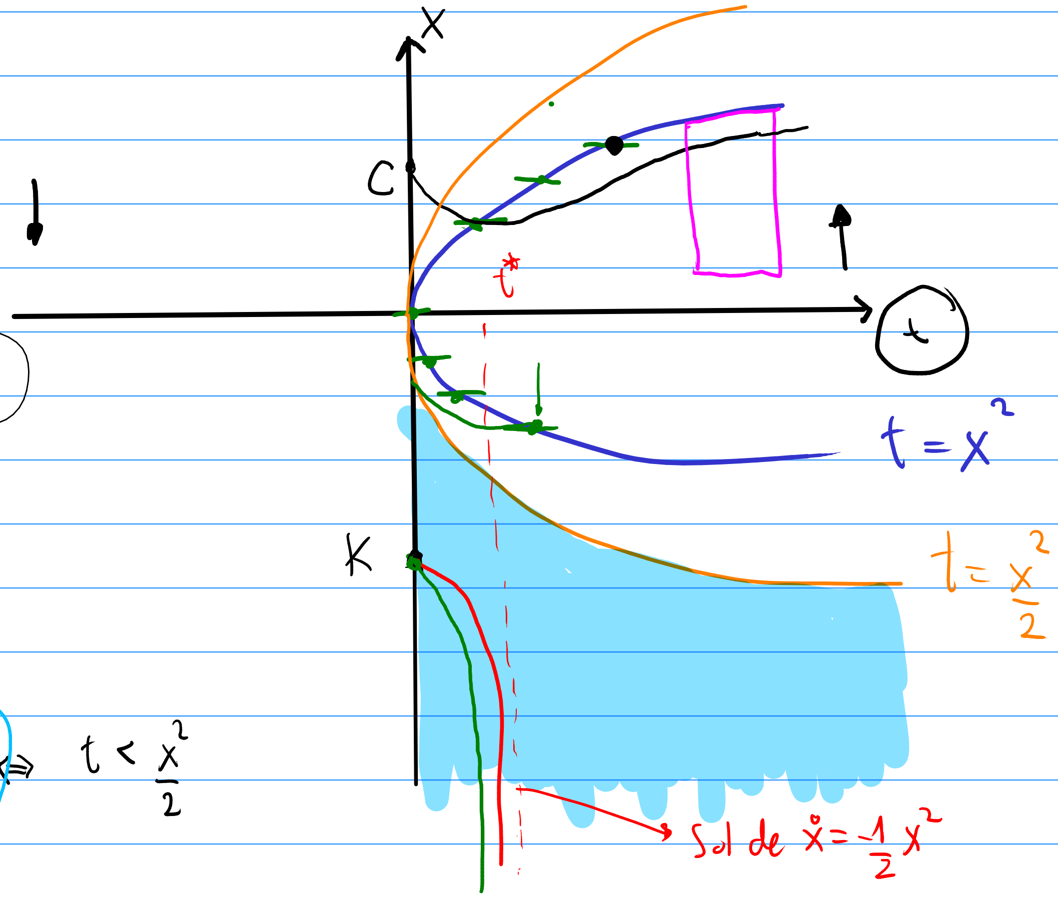
c) Para cada $c \in \mathbb{R}$, sea φ_c la solución maximal que verifica $\varphi_c(0) = c$. Probar

1) Si $c \geq 0 \Rightarrow \varphi_c$ está definida para todo tiempo futuro.



- Como φ_c entra en la parábola y no vuelve a salir entonces usando un compacto como en la figura se ve que está definida para todo tiempo futuro.

2) Existe $K<0$ tal que $\forall c<K$ la solución φ_c tiende a $-\infty$ en un tiempo finito



$\dot{x} = t - x^2$

$\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$

$t - x^2 < -\frac{1}{2}x^2 \iff t < \frac{x^2}{2}$

En el dominio azul ($\{(t,x) : t < \frac{x^2}{2}, x<0, t>0\}$.) vale que

$$\underbrace{t-x^2}_{\dot{x}=t-x^2} < \underbrace{-\frac{1}{2}x^2}_{\dot{x}=-\frac{1}{2}x^2} \implies \text{Vale el lema de comparación.}$$

Sea ψ solución de $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$ con $\psi(0)=K$ tal que $\psi(t)$ no toca la curva $t=\frac{x^2}{2}$. Sea φ solución de $\dot{x} = t - x^2$ con $\varphi(0)=K$

Por comparación se tiene que $\varphi(t) < \psi(t)$ $\forall t>0$, $t \in \operatorname{dom}\varphi \cap \operatorname{dom}\psi$ y tal que $\varphi(t) \in$ Azul. $\implies$ $\varphi(t)$ tiende a $-\infty$ en un tiempo $\hat{t} \le t^*$.
[Siempre]

c) Pide entre otros casos ver que existen soluciones φ_c tal que

φ_c no se mete en la parábola pero además está definida $\forall t$ futuro.

$A = \{ c \in \mathbb{R} \,/\, \varphi_c$ se mete en la parábola$\}$ $(A \supset [0, +\infty))$

$B = \{ c \in \mathbb{R} \,/\, \varphi_c$ tienen de intervalo maximal de la forma $(a, b), b \in \mathbb{R} \}$

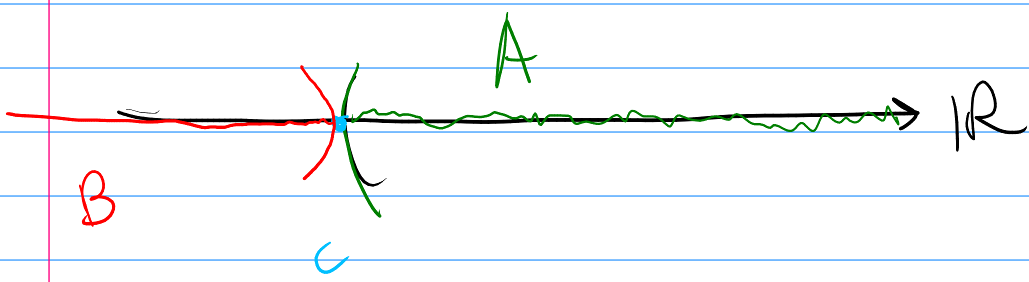
Por continuidad de las condiciones iniciales A y B son abiertos.

Además es claro que son disjuntos.

$\Rightarrow A \cup B \neq \mathbb{R}$. $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ c \notin A, c \notin B$, es decir, φ_c no

$\mathbb{R}$ es conexo

entra en la parábola pero sí está definida $\forall t$ futuro.



* Probar que, a pasado, las soluciones tienden a $+\infty$ en tiempo finito.