Ecuaciones lineales de 2do orden con coeficientes constantes:

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(x)$$

Se le llama ecuación homogenea si $f \equiv 0$.

Prop: Si V es el conjunto de las soluciones de la eq homogenea $\Rightarrow$ V es un e.v de dimensión 2

$\rightarrow$ Necesitamos encontrar dos soluciones y_1, y_2 LI.

El método para encontrar y_1, y_2 se basa en las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son las raíces $\Rightarrow$ $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
- Si λ_0 es raíz doble $\Rightarrow$ $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, $y_2(x) = x\, e^{\lambda_0 x}$
- Si $\lambda_0 = p + iq$, $p - iq$ $\Rightarrow$ $y_1(x) = e^{px}\cos(qx)$, $y_2(x) = e^{px}\sin(qx)$

¿Que sucede si $f \not\equiv 0$? Si y_p es una solución cualquiera de $\ddot{y} + a\dot{y} + by = f$

$\Rightarrow$ Toda solución y se escribe de la forma $y = \boxed{y_p} + C_1 y_1 + C_2 y_2$ donde y_1, y_2 son soluciones LI de la eq homogenea.

Hay un metodo para encontrarla para ciertas $f(x)$

Ejemplo: 15c) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = [\cos(2x) + \sin(2x)]/2$

Calculo y_1, y_2: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$, $\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \underbrace{-1}_{-1} \pm i$

$\Rightarrow y_1(x) = e^{-x} \cdot \cos(x)$, $y_2(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$. $p = -1, q = 1$

Vamos por y_p de $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = [\cos(2x) + \sin(2x)]/2$

$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, $\dot{y}_p(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

$\ddot{y}_p(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

Sustituyo: $(-4A\cos(2x) - \underbrace{4B}\sin(2x)) + 2(\underbrace{-2A}\sin(2x) + 2B\cos(2x)) + 2A\cos(2x) + 2B\sin 2x$

$$= \cos(2x)(\underbrace{-4A} + 4B + \underbrace{2A}) + \sin(2x)(-4B - 4A + 2B) = \cos(2x)\cdot\frac{1}{2} + \sin(2x)\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} -2A + 4B = 1/2 \\ -4A - 2B = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = -3/20 \\ B = 1/20 \end{matrix} \qquad \Rightarrow y_p(x) = -\frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{20}\sin(2x)$$

Toda solución es de la forma:

$$y(x) = \boxed{C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin(x)} - \underline{\frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{20}\sin(2x)}$$

Respuesta natural $\to 0$, $x \to +\infty$ — Respuesta forzada

$\underline{\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y} = f(x)$

$f(x) = \frac{\cos(2x) + \sin(2x)}{2}$

Necesito hallar C_1 y C_2, uso las condición inicial. $\boxed{y(0) = 1}$ $\boxed{\dot{y}(0) = 0}$

Por ejemplo: $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{20} = 1$

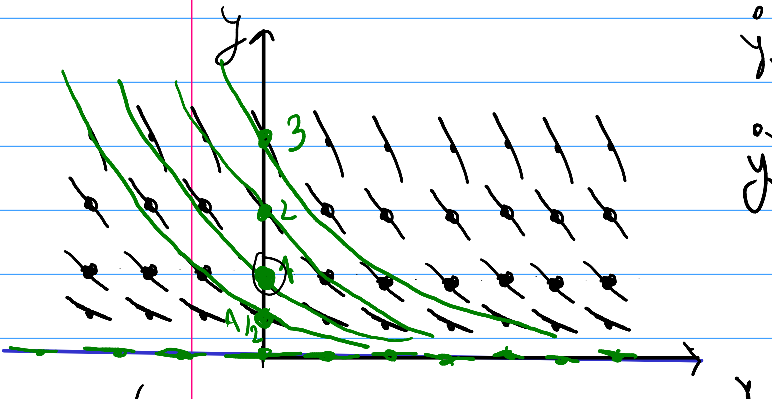
3. Diagrama de fase: esbozar un diagrama de fase

b) $\dot{y} = -y^2$

$\dot{y}(0) = -y(0)^2 = -1^2 = -1$

$\dot{y} = -2^2 = -4$

$\dot{y}(x_0) = -y(x_0)^2 = -1^2 = -1$



$y(x) = 0 \ \forall x$ es solución

$\dot{y} \equiv 0, \quad -y^2 \equiv 0$

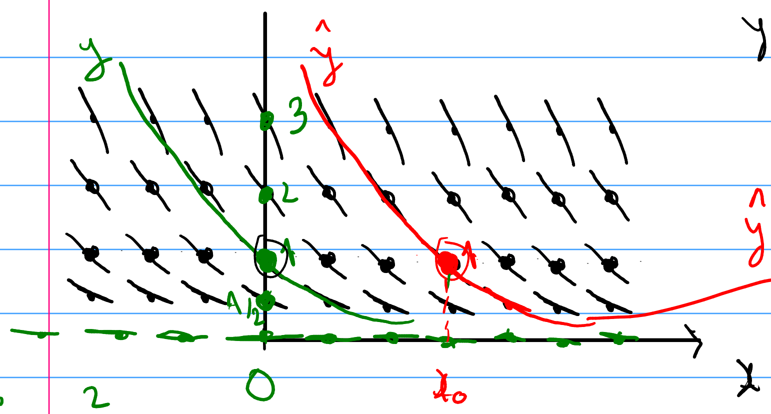
* Observamos que las pendientes son iguales en las horizontales. Eso se debe a que en la ecuación no aparece la x. Se llama ecuación autónoma: $\dot{y} = g(y)$

* Si $y(x)$ es una solución de una solución de una ecuación autonoma $\Rightarrow$ $y(x-x_0)$ es solución.

[No autonoma sería $g(y,x) = -y^2+x$
$\dot{y} = -y^2+x$]

Más precisamente, si $y(x)$ es solución de $\begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $y(x-x_0)$ es solución de $\begin{cases} \dot{y} = g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

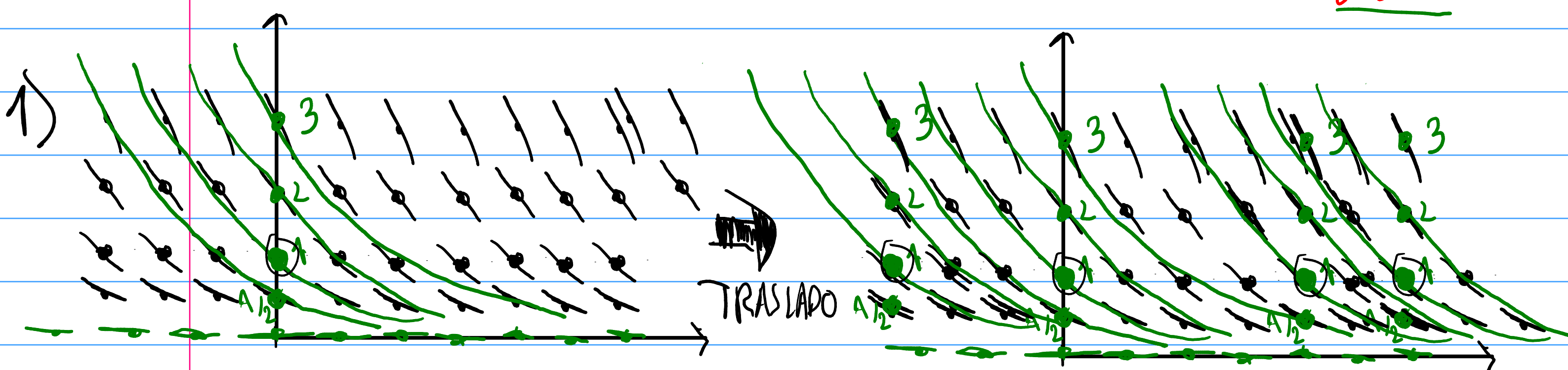


$\hat{y}(x) = y(x-x_0)$ satisface $\begin{cases} \dot{\hat{y}} = -\hat{y}^2 \\ \hat{y}(x_0) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{y} = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$\dot{\hat{y}}(x) = \dot{(y(x-x_0))} = \dot{y}(x-x_0) = g(y(x-x_0))$
$= g(\hat{y}(x))$

1)



2) Si trabajo con ecuaciones autonomas busco soluciones con condición inicial $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ $\dot{y} = -y^2 \Rightarrow \int +\frac{1}{y^2}\,dy = \int -1\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + C$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x-C}$

Si quiero la solución con condición inicial $(0, y_0) \Rightarrow y(0) = \underbrace{\frac{1}{-c} = y_0}_{}$ $\quad c = -1/y_0$

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{x + 1/y_0}$, ¿Cuál es el dominio?

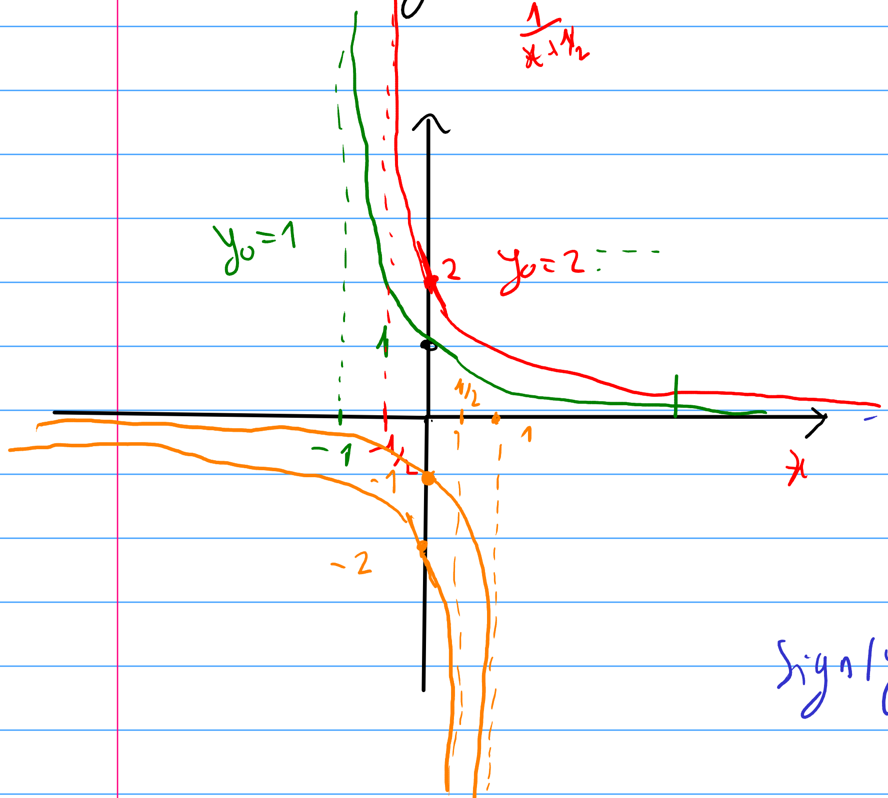
$x + 1/y_0 = 0 \Leftrightarrow x = -1/y_0$ $\quad \boxed{(-\infty, -1/y_0)}$, $(-1/y_0, +\infty)$

$$\boxed{\text{Si } y_0 > \Rightarrow y : \underbrace{(-1/y_0, +\infty)}_{0 \in} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{x + 1/y_0}}$$

$$\text{Si } y_0 < 0 \Rightarrow y : (-\infty, -1/y_0) \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{x + 1/y_0}$$

$0 \in$ $\quad 1$

$$\text{Si } y_0 = 0 \Rightarrow y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = 0$$



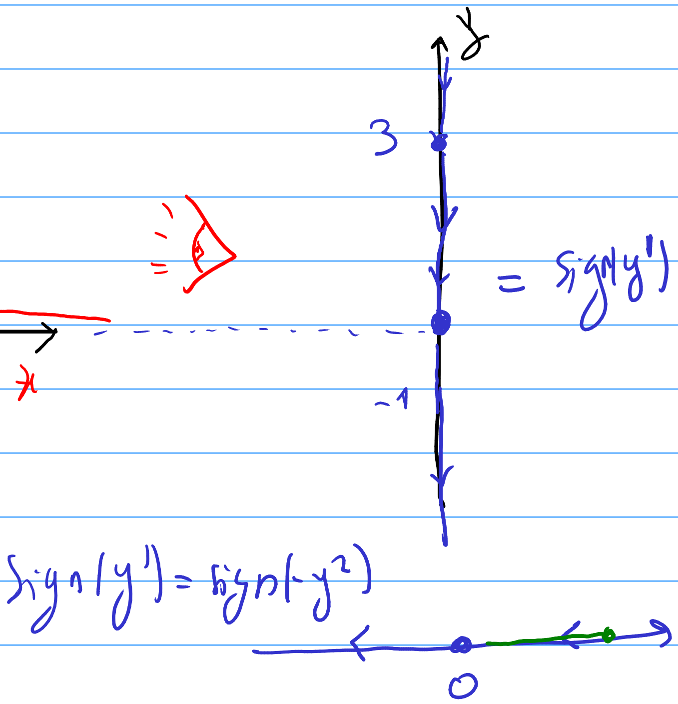
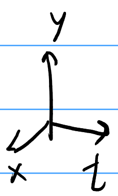


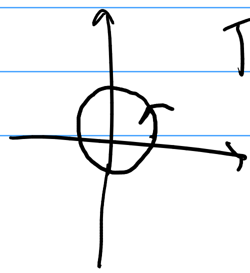
Diagrama de fase: Es un diagrama donde se bosqueja las trayectorias (no el gráfico, la variable no aparece).



$$\alpha(t) = (\overbrace{\cos t}^{X(t)}, \overbrace{\sin t}^{Y(t)})$$

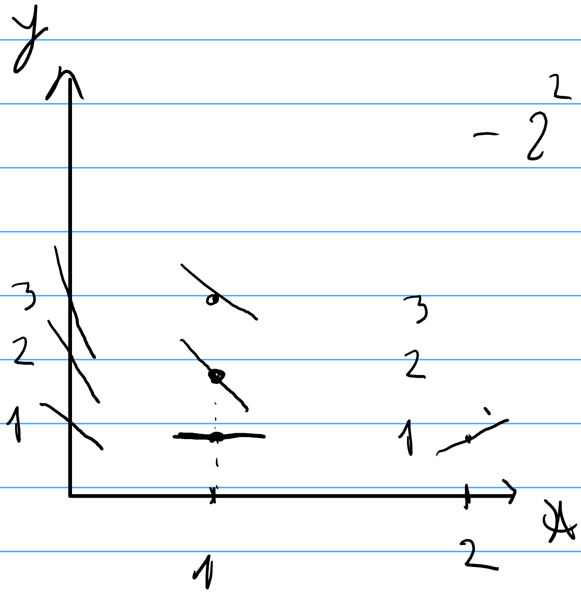
$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

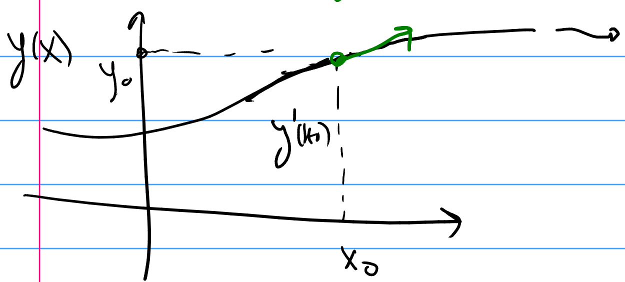
Tiene gráfico en $\mathbb{R}^3$



$$\dot{y}(x) = -\underbrace{y^2(x) + x}$$

$$-2^2 + 1 =$$





$$\alpha(x) = (x, y(x))$$

$$\alpha'(x) = (\underbrace{1, y'(x)})$$