Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación funcional (la incógnita es una función) en el cual aparece una función y sus derivadas.

Por ejemplo $\underbrace{\ddot{x}}+\dot{x} = \sin t$, ¿ $\underbrace{x(t)}$?

$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=\sin t$

$x: I\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suficientemente diferenciable satisfaciendo la ecuación.

1. Variables separables

b) $(1+e^x)yy' = e^x$.

*) $yy' = \dfrac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} yy'\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)\Big|_{x_0}^{x} = \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)$

¿ $y(x)$?

$$\int_{x_0}^{x} y(x)\,y'(x)\,dx = \int_{u(x_0)}^{u(x)} u\,du = \int_{y(x_0)}^{y} y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{y(x_0)}^{y} = \frac{y^2}{2} - \frac{y(x_0)^2}{2}$$

$u = y(x)$
$du = y'(x)\,dx$ | Le voy a llamar y de nuevo en lugar de u

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right) \Rightarrow y^2 = y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)$$

¿ $\underbrace{y(x)}$? $y: \underbrace{I}_{x_0\in} \subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / Buscamos una solución que en x_0 valga $y_0>0$

Considero el I más grande donde $\underbrace{y(x)>0}$

$$\boxed{y^2 = y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)} \Rightarrow |y| = \sqrt{y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \sqrt{\underbrace{y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)}_{\geq 0}}. \qquad y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right) \geq 0$$

(en x_0 es >0)

$\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right) = -\frac{y_0^2}{2} \iff \frac{1+e^x}{1+e^{x_0}} \geq e^{-\frac{y_0^2}{2}}$

$\underbrace{\phantom{e^{-\frac{y_0^2}{2}}}}_{<1}$

en x_0 vale 1 y si $x < x_0$ empieza a disminuir su valor.

Si $x \to -\infty$ tiende a $\frac{1}{1+e^{x_0}}$

Si $\frac{1}{1+e^{x_0}} < e^{-\frac{y_0^2}{2}} \Rightarrow \exists\, \bar{x} < x_0$ donde $\frac{1+e^{\bar{x}}}{1+e^{x_0}} = e^{-\frac{y_0^2}{2}}$

$\Rightarrow y : (\bar{x}, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Sino mi solución está definida para todos los reales.

Si $y_0 < 0 \Rightarrow$ Vale la misma fórmula pero con un $-$

$$y(x) = -\sqrt{\underbrace{y_0^2 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right)}}\,.$$

Caso $y_0 = 0$: no hay solución: $(1+e^x)\underbrace{y}_{y=0}y' = e^x \Rightarrow 0 = e^{x_0}$ ↯.

4 Lineal de primer orden: $y' + a(x)y = b(x)$ (✱)

Ventaja: Si y_1 e y_2 son soluciones de (✱) entonces toda otra solución y se escribe de la forma $y = \underbrace{y_1} + c \cdot \underbrace{(y_2 - y_1)}$

Las soluciones forman una recta en un espacio vectorial

Resolución general:

Opción 1):

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int e^{\int a(t)dt} b(t)dt + K\right)$$

es la solución. [VER TEÓRICO].

Ejemplo con la opción 2; Ejercicio 4d): $y' - \frac{2}{x}y = x^4$

(ES EQUIVALENTE)

Opción 2: 1. Hallo una solución general de

$$y' + a(x)\,y = 0$$

le llamo $y_H(x)$. (variables separables)

En el ejemplo: $\boxed{y' - \frac{2}{x}y = 0}$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + C = \ln x^2 + C$

$\Rightarrow |y| = e^{C+\ln x^2} = e^C x^2$ $\left.\begin{array}{l} y = \underbrace{e^C}_{>0} x^2 \\ y = -\underbrace{e^C}_{<0} x^2 \end{array}\right\}$ $y = Kx^2$, $K \neq 0$

De hecho $K=0$ también es solución. En resumen $y_H(x) = Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$.

2. Busco una solución particular de $y' + a(x)y = b(x)$

Como estoy en orden 1 hay un método para buscar la solución:

$y_P(x) = K(x)x^2$: Sustituyo en la ecuación diferencial y tengo

para este ejemplo: $y_P' - \frac{2}{x}y_P = x^4 \Rightarrow \left(K'(x)\,x^2 + \boxed{K(x)2x) - \frac{2}{x}K(x)x^2}\right) = x^4$

se cancela

$\Rightarrow K'(x)\cdot x^2 = x^4 \Rightarrow K'(x) = x^2 \Rightarrow K(x) = \frac{x^3}{3}$

$y_P(x) = \frac{x^3}{3}\cdot x^2$

3. La solución general a $y' + a(x)y = b(x)$ es $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

En este ejemplo la $\boxed{y(x) = Kx^2 + \frac{x^5}{3}}$.

8. $y' + P(x)y = Q(x)\underbrace{y^n}$ $n>1$. (EQ de Bernulli).

$z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)} \Rightarrow$ ¿Como evoluciona z? Qué eq diferencial gobierna z?

$z'(x) = \left(y^{1-n}(x)\right)' = (1-n)\underbrace{y^{1-n-1}(x)}\cdot y'(x) = \frac{(1-n)}{y^n(x)}\cdot y'(x) = \frac{(1-n)}{y^n(x)}\cdot\left(Q(x)y^n - P(x)y\right)$

$$\Rightarrow z'(x) = (1-n)\,Q(x) - (1-n)\cdot\frac{P(x)}{y^{n-1}(x)} = (1-n)\,Q(x) - (1-n)\cdot z(x)\cdot P(x)$$

$$\Rightarrow z'(x) + (1-n)\,z(x)\,P(x) = (1-n)\,Q(x).$$

e) $-2y' = xy^3 + y$. Hallar y solución que cumpla $\underbrace{y(1)=-1}$.

$$n=3 \Rightarrow z = \frac{1}{y^2}$$

$$z' = -\frac{2}{y^3}\,y'(x) = \frac{-2}{y^3}\left(\frac{xy^3+y}{-2}\right) = x + \frac{1}{y^2} = x + z$$

$$\Rightarrow z' - z = x \quad , \quad z_H):\ z' - z = 0 \Rightarrow z_H(x) = Ae^{x}$$

(A ojo) $z_p(x) = \alpha x + \beta$ $\quad \alpha - (\alpha x + \beta) = x \Rightarrow \alpha - \beta - \alpha x = x \Rightarrow \alpha = \beta$, $\alpha = -1$

$$z_p(x) = -1 - x$$

$$\Rightarrow z(x) = -(1+x) + \underbrace{A}e^{x} \quad \Big/ \quad \underbrace{y(1)}=-1 \Rightarrow z(1) = \frac{1}{y(1)^2} = 1$$

$$z(1) = -2 + Ae = 1 \Rightarrow A = 3e^{-1}$$

$$\Rightarrow z(x) = 3e^{x-1} - (1+x) \quad \Rightarrow \quad y^2(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{3e^{x-1} - (1+x)}$$

$$|y(x)| = \frac{1}{\sqrt{3e^{x-1} - (1+x)}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{-1}{\sqrt{3e^{x-1} - (1+x)}}$$

OBS: No está definida $\forall x$: $\quad y : (\bar{x}, \underbrace{+\infty}) \to \mathbb{R}$

$$\bar{x} < 1$$

$$\begin{cases} z = y/x^n \quad \rightarrow \quad \dfrac{1-xy^2}{2x^2y} \\ z'(x) = \dfrac{x^n \cdot y'(x) - y(x)\, n x^{n-1}}{x^{2n}} \end{cases}$$

$$z = \frac{y}{x^n} \quad \Big\| \quad y = z \cdot x^n$$

$$\frac{1}{2x^2y} - \frac{y}{2x} = y' = z' x^n + z n x^{n-1}$$