2. a) Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son los que corresponden a situaciones en los cuales $u(x,t)$ no depende de t.

Hallar la solución estacionaria a la ecuación $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ y con condiciones de borde

$$u(0,t) = A \quad , \quad u(L,t) = B$$

$$u(x,t) = u_e(x) \Rightarrow \partial_t u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty).$$

$$\partial_{xx} u(x,t) = \partial_t u(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = ax+b \underset{\text{Condiciones de borde}}{=} \frac{(B-A)}{L} x + A$$

b) Hallar la solución de la ecuación del calor en $(0,1) \times (0,\infty)$ con

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = 0 \\ u(0,t) = 0 \ , \ u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 1 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases} \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + u_e(x) \overset{A=0,\ B=1.}{=} v(x,t) + x$$

¿Qué satisface v? $0 = \partial_t u - \partial_x^2 u = \left(\partial_t v - \partial_x^2 v\right) + \underbrace{\left(\partial_t u_e(x) - \partial_x^2 u_e(x)\right)}_{0}$

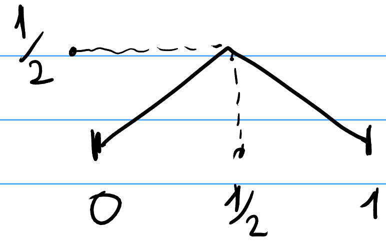
$\Rightarrow$ 1) $\partial_t v - \partial_x^2 v = 0$

2) $0 = u(0,t) = v(0,t) + u_e(0) = v(0,t)$

$$1 = u(1,t) = V(1,t) + u_e(1) = V(1,t) + 1 \Rightarrow V(1,t) = 0.$$

3) $$\begin{cases} 2x & si\ x \in [0, 1/2] \\ 1 & si\ x \in [1/2, 1] \end{cases} = u(x,0) = V(x,0) + u_e(x) = V(x,0) + x$$

$$\Rightarrow \underset{V_0(x)}{\underset{\shortparallel}{V(x,0)}} = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1/2] \\ 1-x & si\ x \in [1/2, 1]. \end{cases} =$$



Teorema 0.1.

Sea $V_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *condición inicial del problema de Cauchy-Dirichlet . Si* $\sum_{k=1}^{n} |b_k|$ *es convergente entonces:*

$$V(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \tag{0.8}$$

es solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condición de bordes nulas y condición inicial $V_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(kx)$*. Además* $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ *converge uniformemente.*

Calculo la serie de Fourier tipo seno de $V_0(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1/2] \\ 1-x & si\ x \in [1/2, 1] \end{cases}$

$$b_k = 2\int_0^1 V_0(x) \sin(k\pi x)\, dx = 2\left[\int_0^{1/2} x \sin(k\pi x)\, dx + \int_{1/2}^1 (1-x)\sin(k\pi x)\, dx\right]$$

$$= 2\left[-x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx + \left(-(1-x)\right)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx\right]$$

$$= 2\left[\cancel{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi}} + \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_0^{1/2} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi}} - \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big|_{1/2}^1\right]$$

$$= 2\left[\frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} + \frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}\right] = 4\frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

Uniforme.

$$\Rightarrow \quad V_0(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}\sin(k\pi x)}_{|\cdot| \le \frac{4}{\pi^2 k^2} \text{ y } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} < \infty} \quad , \ x \in [0,1]$$

Se cumple la hipótesis de que $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < \infty$. ← Entonces por el teorema, una solución $V(t,x)$ es

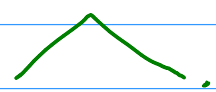
$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} \cdot \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

La solución general a la ecuación del calor con perfil $\begin{cases} 2x, & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1, & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$

y condiciones de borde $u(0,t)=0 \ \forall t$, $u(1,t)=1 \ \forall t$

es
$$u(x,t) = u_e(x) + V(x,t) = x + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}}$$

(*) Gracias al teorema.

Es solución de la eq del calor con condiciones de borde nulos y perfil .

c) Hallar una estimación de $|u(x,t) - u_e(x)|$ y probar que la solución anterior tiende a la solución estacionaria con $t \to +\infty$.

$$|u(x,t) - u_e(x)| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t} \right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \left| b_k \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t} \right|$$

$$= |b_1 \sin(k\pi x)|\, e^{-\pi^2 t} + |b_2 \sin(2\pi x)|\, \underbrace{e^{-4\pi^2 t}}_{\le e^{-\pi^2 t}} + |b_3 \sin(3\pi x)|\, \underbrace{e^{-9\pi^2 t}}_{\le e^{-\pi^2 t}} + \dots$$

$$\le \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k \sin(k\pi x)|\, e^{-\pi^2 t} \le e^{-\pi^2 t} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

$$a'_n = 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \cos(n\pi x)\, dx$$

$$= 2 \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{n\cancel{\pi} \cos(\pi x) \operatorname{sen}(n\pi x)}{\cancel{\pi}}\, dx \right]$$

$$= 2 \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 - \left[n \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) \Big|_0^1 - n \int_0^1 \frac{n\cancel{\pi} \cos(n\pi x) \operatorname{sen}(\pi x)}{\cancel{\pi}} \dots \right. \right.$$

$$= 2 \left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 + n^2 \int_0^1 \cos(n\pi x) \sin(\pi x)\, dx \right]$$

$$\Rightarrow (2 - 2n^2) \int_0^1 \cos(n\pi x) \sin(\pi x)\, dx = 2 \left[-\frac{\cos(\pi x)\cos(n\pi x)}{\pi} \right] \Big|_0^1$$

Si $n \neq 1 \Rightarrow$ despejo y gané

Si $n = 1 \Rightarrow a'_1 = 2 \int_0^1 \sin(\pi x) \cos(\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\pi x)^2}{2} \Big|_0^1 = 0$

Si $n=0$, $a_0' = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left. \frac{-2\cos(\pi x)}{\pi} \right|_0^1 = \frac{4}{\pi}$

$\Rightarrow f = \frac{a_0}{2} + \sum \dots = \frac{2}{\pi} + \sum \dots$

"a_0 de la letra"

$a_n' = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(n\pi x) = \boxed{2\left(\frac{2}{2-2n^2}\right.}\left(\left.\frac{-\cos(\pi x)\cos(n\pi x)}{\pi}\right|_0^1\right)\Bigg)$

$n \neq 1$

$\frac{2}{(1-n)(1+n)}$

$= \frac{2}{(1-n)(1+n)\pi}\left[\cos(n\pi) + 1\right] = \frac{2}{(1-n)(1+n)\pi}\left[(-1)^n + 1\right]$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \\ \frac{4}{\pi(1-n)(1+n)} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$ $n=1$

C

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n' \cos(n\pi x)$

$a_0 = \frac{2}{\pi}$

$a_0' = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$