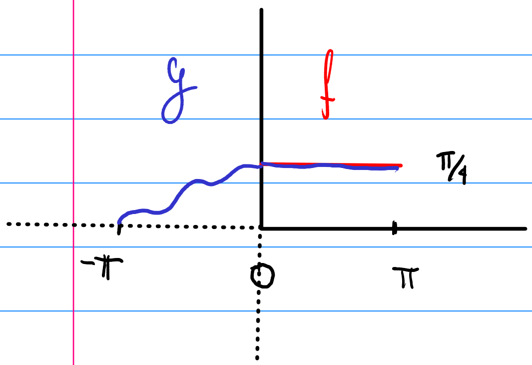
Prop 0.6 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua, de período $2L$.

Entonces $S_n(f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.

12. Probar que la serie de Fourier de tipo seno de la función $f(x) = \pi/4$ es:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots, \quad 0 < x < \pi$$

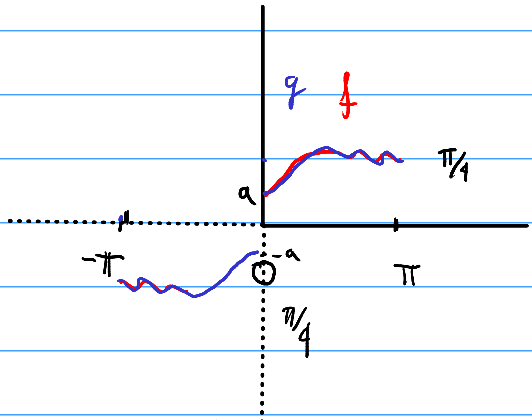


$g\big|_{[0,\pi]} = f$

La serie de Fourier de g aproxima a g en $\mathbb{R}$ y por lo tanto a f en $[0,\pi]$.

Hay infinitos posibles extensiones de f, pero hay dos que son bien útiles.

1) Extensión impar:



* Elijo g extensión de f a $[-\pi,\pi]$ impar.

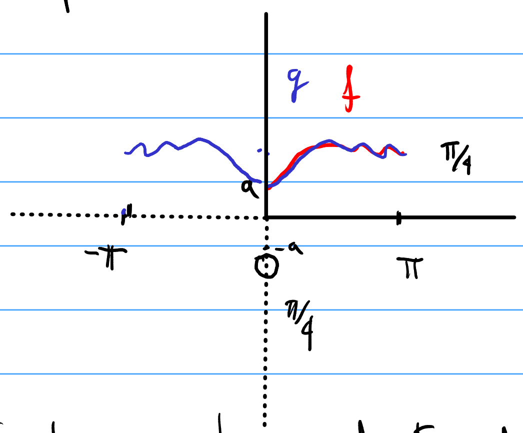
En este caso la serie de Fourier de g se simplifica bastante:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \overset{\text{impar}}{\stackrel{!}{=}} 0 \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)\cos(kx)}_{\text{impar}}\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)\sin(kx)}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

Es una serie de Fourier que solo tiene senos: Se llama serie de Fourier tipo seno.

2) Extensión par



* Elijo g extensión de f a [-π,π] par

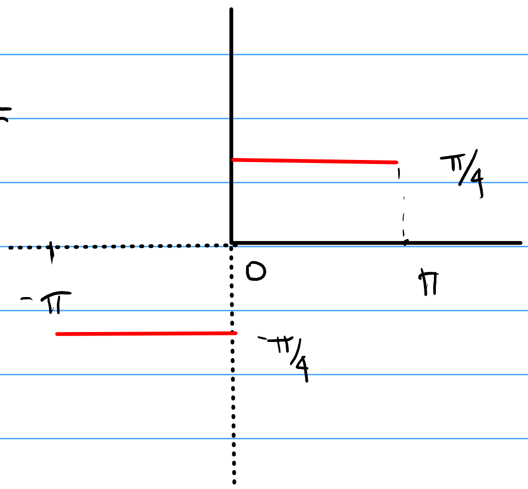
En este caso la serie de Fourier de g se simplifica bastante:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = 0$$

SERIE DE FOURIER TIPO COSENO.

Volviendo al ejercicio; $g =$



$$a_0 = 0, \quad a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(kx)}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1-\cos(k\pi)}{2k} = \frac{1-(-1)^k}{2k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$S_\infty(g) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{l=1}^{+\infty} b_{2l-1} \sin((2l-1)x)$$

$$= \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l-1)} \sin((2l-1)x)$$

* En base a esto, calcular $\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l-1)^2}$

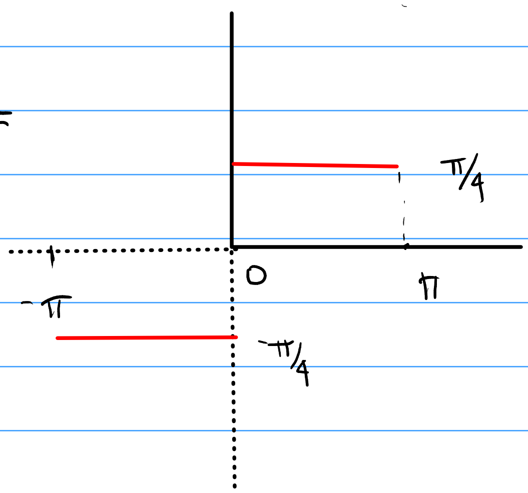
Igualdad Parseval: $\|g\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$ donde a_k, b_k son los coef de Fourier de g

Por Parseval $$\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \|g\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4^2}\,dx = \frac{\pi^2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{4^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{8}$$

* ¿Qué suma se obtiene poniendo $x = \pi/2$?

Estudio convergencia puntual. La función g está en las hipótesis de Dini

$g =$



Por lo tanto,

$$S_n(g) \xrightarrow{cp} h$$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq k\pi \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases}$$

Promedio de las discontinuidades

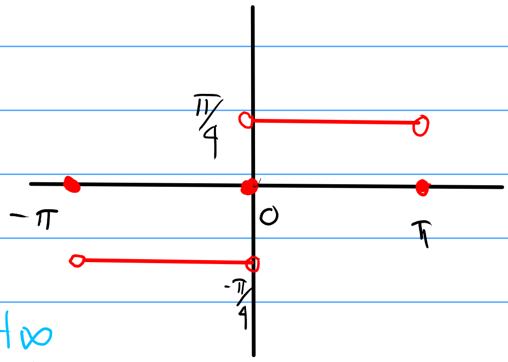
En particular $$\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell-1)} \underbrace{\sin\left((2\ell-1)\overset{\overset{x-\pi/2}{\uparrow}}{\pi/2}\right)}_{1,-1,1,-1,1,-1,\dots} = \lim_{n\to+\infty} S_n(g)(\pi/2)$$

$$= g(\pi/2) = f(\pi/2) = \pi/4$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = \frac{\pi}{4}.$$

* ¿La serie de Fourier de g converge uniformemente en $\mathbb{R}$?

Recordar $S_\infty(g) = h$



* $$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|+|b_k| = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell-1)}$$ no converge $\Rightarrow$ No podemos usar el mayorante de Weierstrass y por lo tanto todavía no sabemos.

Si $$\underbrace{S_n(g)}_{\downarrow} \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} h, \Rightarrow h \text{ será continua } ↯$$

Es una sucesión de funciones continuas

* ¿Cuál es la serie de Fourier de tipo coseno de f?

$f(x)=\pi/4$, $0<x<\pi$.

$\Downarrow$

$g(x)=\pi/4 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, $\quad S_\infty(g)=\pi/4$

* ¿Cuánto vale el polinomio de Taylor de grado 3 en $x=0$ de

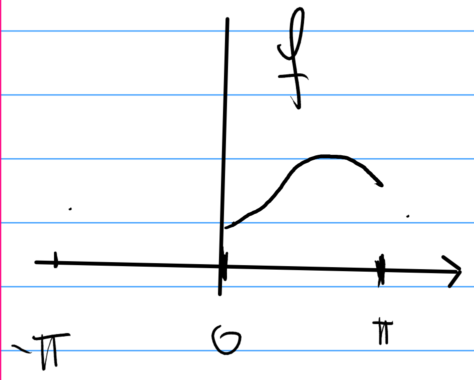
$P(x)=1+x^2$? $\quad\Rightarrow$ Polinomio de Taylor $=1+x^2$.

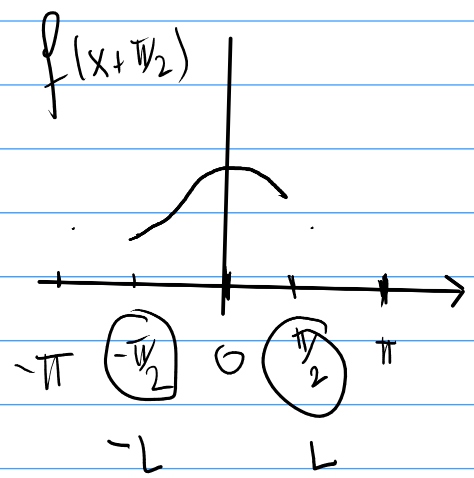
* $f(x)=\cos(2x)+2\sin(x)+\pi/6$

$\Rightarrow S_\infty(f)(x)=\cos(2x)+2\sin(x)+\pi/6$

$[-L,L]$

$\frac{k\pi x}{L}$





Discutir convergencia

$$f(x+\pi/2) \overset{\uparrow}{=} \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos(2kx)+b_k\sin(2kx)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos\left(\underline{2k(x-\pi/2)}\right)+b_k\sin(2k(x-\pi/2))$$

$$\cos(2kx-k\pi)=(-1)^k\cos(2kx)$$