Series de Fourier

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua a trozos y $2L$-periódica $\}$

y $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ producto interno de la forma $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) g(x)\, dx$

resulta que

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right), \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(3\frac{\pi}{L} x\right), \dots \right\}$$

es un conjunto ortonormal. [Resulta que, con teoría, es una base ortonormal]

La serie de Fourier de una función $f \in V$ es la proyección ortogonal en el subespacio generado por S:

La serie de fourier de f es esta fórmula.

$$\boxed{S_\infty(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{¿\boxed{+\infty}?} a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{¿\boxed{+\infty}?} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)}$$

¿Qué noción de convergencia?

donde

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \quad a_k = \left\langle f, \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad b_k = \left\langle f, \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) f(x)\,dx$$

Convergencia: Teorema 0.2: Si $f \in V$ entonces se cumple que

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

[Aquí a_k, b_k son los coeficientes de fourier]

es decir,

$$f = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\boxed{\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)}}_{S_n(f)}$$

donde el límite es en la norma del espacio V.

Es decir, $\|f - S_n(f)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Recordando la definición de norma, esto quiere decir:

$$\sqrt{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left(f(x) - S_n(f)(x)\right)^2 dx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

<u>Corolario</u> (Igualdad de Parseval)

Si $f \in V \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 + \frac{a_0^2}{2}$

[Esto se puede interpretar como que el mapa $f \mapsto \{a_k\}, \{b_k\}$ es una isometría lineal].

Teorema (Dini)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua a trozos, $2L$-periódica y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+, \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-$$

Entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$ //

En otras palabras

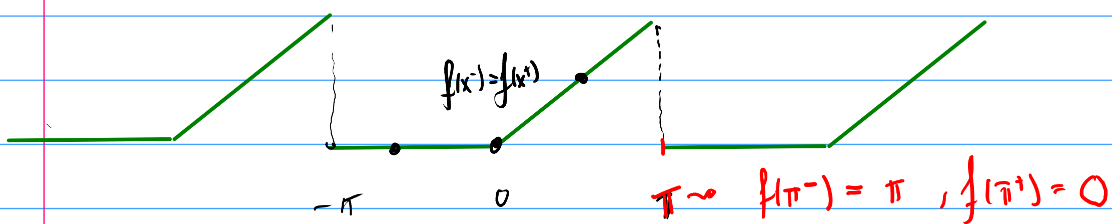
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \xrightarrow{cp} g$$

donde $g(x) = \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

Obs: Si f es continua $\Rightarrow$ $S_n(f) \xrightarrow{cp} f$.

---

10 a) Hallar la serie de Fourier de la función 2π-periódica dada por la fórmula
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi/2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\underbrace{\cos(kx)}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left.x\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\overbrace{\pi\cdot\frac{\sin(k\pi)}{k}}^{0} - \left(\left.-\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|_0^{\pi}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k}-1}{k^2}$$

$$\Rightarrow a_K = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^K-1}{K^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ es par} \\ -\frac{2}{\pi K^2} & \text{si } K \text{ impar.} \end{cases}$$

$$b_K = \frac{(-1)^{K+1}}{K}$$ (HACER, CON PARTES SALE IGUAL)

$$\Rightarrow S_\infty(f) = \frac{\pi}{4} + \sum_{K=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^K-1}{\pi K^2}\right)\cos(Kx) + \frac{(-1)^{K+1}}{K}\,\text{sen}(Kx)$$

b) Sustituyendo x por π en la serie de Fourier demostrar que

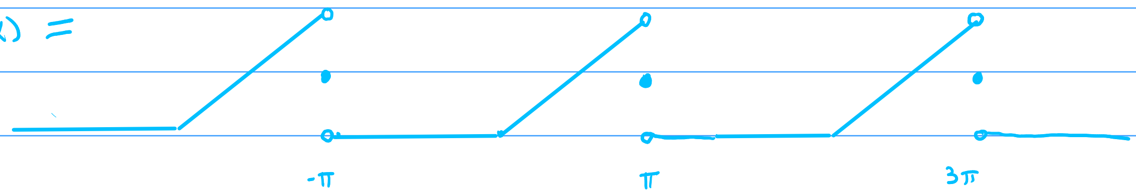
$$\sum_{K=1}^{+\infty}\frac{1}{(2K-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Estudio convergencia puntual: Se cumplen las hipótesis de Dini

$$\Rightarrow S_n(f) \xrightarrow{CP} g,$$

$$g(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq K\pi,\ K\in\mathbb{Z}, \\ \frac{\pi+0}{2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$g(x) =$



Chequeo hipótesis de Dini en π:

En π: $$\lim_{t\to0^+}\frac{f(\pi+t)-f(\pi^+)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{f(\pi+t)}{t} = \lim_{t\to0^+}\frac{0}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to0^-}\frac{f(\pi+t)-\overset{\pi}{\overline{f(\pi^-)}}}{t} = \lim_{t\to0^-}\frac{\pi+t-\pi}{t} = \lim_{t\to0^-} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(\pi)}_{} = g(\pi) = \pi/2$$

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{a_k}_{\text{Vale 0 si k es par}} \cos(k\overset{x=\pi}{\pi}) + b_k \underbrace{\sin(k\pi)}_{0\ \forall k} = \pi/2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1} \cos((2k-1)\pi) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \underbrace{\cos((2k-1)\pi)}_{-1} = \pi/2$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{-2}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ impar.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} = \pi/2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad //$$

c) Es un truco, clase que viene.