8 a) Llamemos $x: I \to \mathbb{R}$ a la solución maximal de $\dot{x} = \frac{1+x^2}{x}t^2$ (*) con condición inicial $x(0)=1$. Hallar $x(t)$ y probar $I \supset [0,+\infty)$.

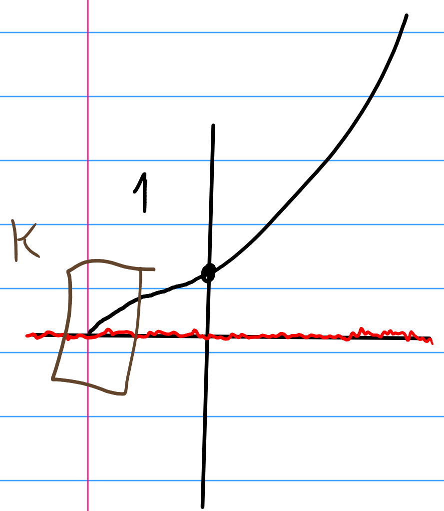
$$\frac{x\dot{x}}{1+x^2} = t^2 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_1^{x(t)} \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int_0^t t^2\,dt \rightsquigarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{x(t)} = \frac{t^3}{3}\Big|_0^t = t^3/3$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) = t^3/3 \rightsquigarrow \frac{1+x^2}{2} = e^{\frac{2t^3}{3}} \rightsquigarrow x^2 = 2e^{\frac{2t^3}{3}} - 1$$

$$|x(t)| = \sqrt{2e^{\frac{2t^3}{3}}-1}, \quad x(t) = \underbrace{\sqrt{2e^{\frac{2t^3}{3}}-1}}_{>0 \iff t \in \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}\ln(\frac{1}{2})},\, +\infty\right) = I}$$

$x(0)=1$

$$2e^{\frac{2t^3}{3}}-1=0 \iff \frac{2t^3}{3} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)} < 0$$



- Obs: K no es un compacto válido para el teo de escape de compacto ya que $K \not\subset$ Dominio $= \{(t,x) : x \neq 0\}$.

b) Consideremos (*) $\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$, $F(t,x) = \frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2\arctan(x+t)$

1) Dominio de F: $\text{Dom } F = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} = \Omega$

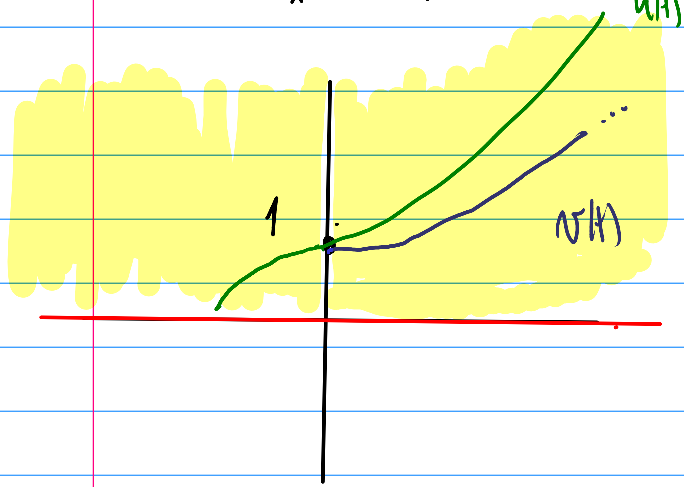
2) Verificar las hipótesis de Picard: es $C^1 \Rightarrow$ Vale picard.

3) Sea $v: J \to \mathbb{R}$ la solución maximal de (*). Probar que $v(t) \leq u(t)$ $\forall t \geq 0, t \in J$.

*Recordar el lema de comparación (Ej 4).

$$F(t,x) = \overbrace{\frac{1+x^2}{x}}^{\geq 0} \cdot \overbrace{t^2}^{\geq 0} \cdot \overbrace{\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(t+x)}^{\geq 0 \text{ y } \leq 1} \leq \frac{1+x^2}{x} t^2 = g(t,x) \quad : \quad \dot{u} = g(t,u)$$

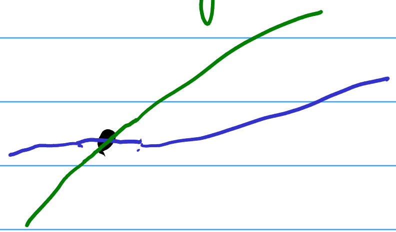
En lo amarillo



$\Rightarrow$ Por el lema de comparación

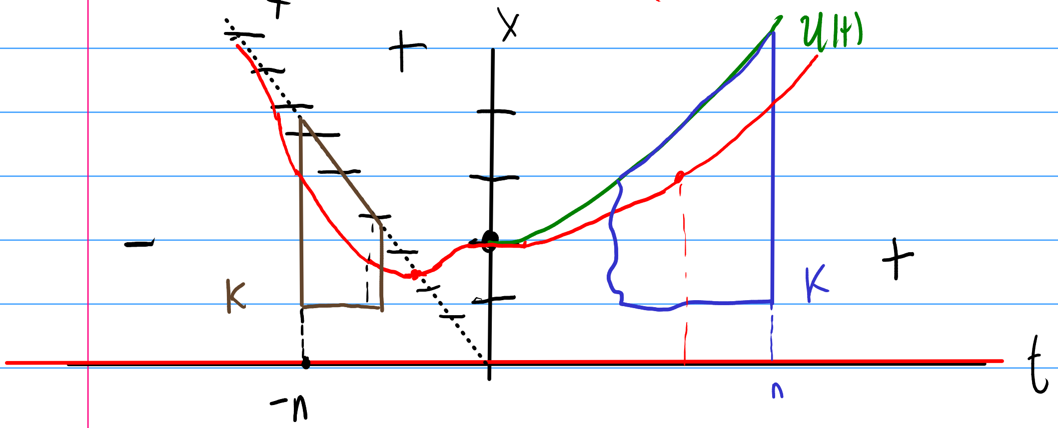
$v(t) \leq u(t), \quad \forall t \geq 0, t \in J$

$\dot{v} = f(t,v)$ $\quad$ $\dot{u} = g(t,u)$



$f(t,x) \leq g(t,x)$

d) Probar que $J \supset [0,+\infty)$ (de hecho $J = \mathbb{R}$).



$$\dot{x} = \frac{1+x^2}{x}\, t^2\, \frac{2}{\pi} \arctan(t+x)$$

* $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow t=0$ o $t+x=0$, * Signo$(\dot{x})$
* $\dot{x} = 0$, signo$(\ddot{x})$.
* Tomo K el compacto marrón
  $\Rightarrow$ V(t) se escapa a pasado
  - Como V(t) decrece, no se escapa por abajo.
  - Tampoco por arriba

  $\Rightarrow \exists t \in J,\ t < -n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow J \supset (-\infty, 0]$

* $J \supset [0,+\infty)$: Tomo K compacto azul
  $\Rightarrow$ V(t) se escapa a futuro
  - Como V(t) crece no se escapa por la tapa de abajo
  - Como $V(t) \leq u(t) \Rightarrow$ No se escapa por arriba

  $\Rightarrow \exists t \in J,\ t > n.$

  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow J \supset [0,+\infty)$

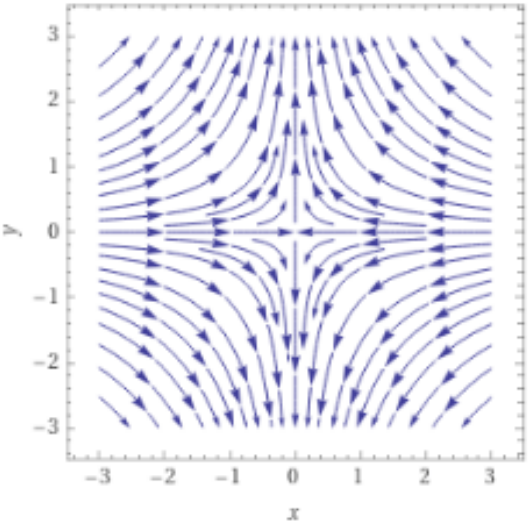
$\Rightarrow J = \mathbb{R}$

Ejercicio 4 Desarrollo

Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$$

con $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Supongamos que la ecuación tiene asociado el siguiente diagrama de fase:



Observación: las trayectorias cuya condición inicial se encuentra en el interior de alguno de los cuadrantes definidos por los ejes coordenados son asintóticas a dichos ejes. El origen $(0,0)$ es el único punto de equilibrio de la ecuación.

1. Sea (I_1, ϕ_1) la solución maximal tal que $\phi_1(0) = (1,0)$. Probar usando el teorema de *Escape de compactos* que I_1 no está acotado superiormente.
2. Probar que si (I_2, ϕ_2) es solución con $\phi_2(0) = (x_0, y_0)$, siendo $\phi_2(t) = (x(t), y(t))$, entonces (I_2, ϕ_3) con $\phi_3(t) = (x(t), 0)$ y (I_2, ϕ_4) con $\phi_4(t) = (0, y(t))$ son soluciones de la ecuación.
3. Probar que todas las soluciones tienen intervalo maximal $\mathbb{R}$.

ϕ_2 es solución, $\phi_2(t) = (x(t), y(t))$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = f(x) \quad (*)$$

ϕ_3 solución ya que se cumple $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ 0 = g(0). \end{cases}$

$\shortparallel$

$(x(t), 0)$