4. Sea la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

a) Calcular el límite puntual de $f_n$ y $f_n'$. ¿Convergencia uniforme?

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{1+nx_0^2} = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{CP} f$ , $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0 \quad \forall x$.

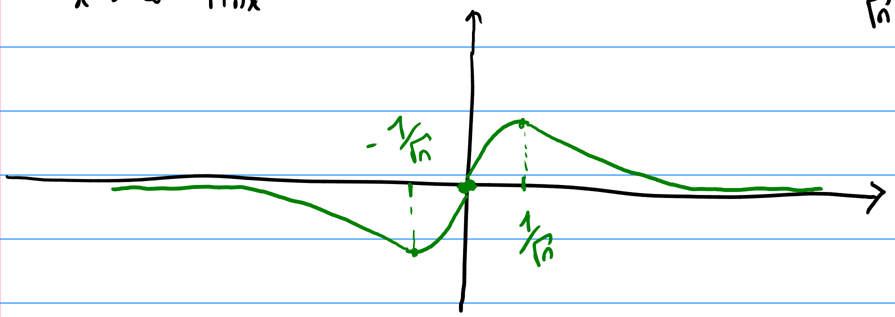
¿Converge uniformemente? $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+nx^2} - 0 \right|$

Estudio de $\frac{x}{1+nx^2}$ :

- Es impar
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0^+$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0^-$

$$f_n'(x) = \frac{(1+nx^2) - x\,2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Signo $f_n'$: $-$ (0 en $-\frac{1}{\sqrt{n}}$) $+$ (0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$) $-$



$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|f_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1/\sqrt{n}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$.

Convergencia puntual de $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$

Fijo $x_0 \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-nx_0^2}{(1+nx_0^2)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0\neq 0 \\ 1 & \text{si } x_0=0 \end{cases}$ .

$f_n' \xrightarrow{cp} g$, $\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

¿Convergencia uniforme? No, ya que $f_n'$ es una sucesión de funciones continuas

Si la convergencia fuese uniforme entonces el límite, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sería una función continua.

b) Daría cierto que $f_n \xrightarrow{cu} f$, $f_n' \xrightarrow{cp} g$. Además, $f$ es derivable pero $f'\neq g$ ($f'(0)=0$, $g(0)=1$).

Es decir, no es cierto que

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{d f_n}{dx}}_{g} = \underbrace{\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{f}\Big)}_{f'}$$

Recordar: Sea $f_n:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase $C^1$ y una función $g:(a,b)\to\mathbb{R}$. Si se cumple que

1. $f_n' \xrightarrow{cu} g$

2. $\exists x_0 \in (a,b)$, $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Entonces existe $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $C^1$ tal que $\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ y } f'=g}$

Es decir, se cumple que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{df_n}{dx} = g = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)$

5. Sea la sucesión $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x}$ con $x \in [0,1]$.

a) Convergencia puntual.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{CP} f, \quad f:[0,1]\to\mathbb{R}, \ f(x)=0 \ \forall x.$$

b) Comparar $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ vs $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

⊛ $$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n2^n x}{1+n2^n x^2}dx = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n2^n x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+n2^n)}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n2^n)}{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{\ln(n)}{2n}}}_{\to 0} + \boxed{\frac{\ln(2^n)}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{2n} = \frac{\ln(2)}{2}$$

⊛ $$\int_0^1 \lim_{n} f_n(x)dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$$

**Obs:** $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx .$$

**Recordar:** Sea una sucesión de funciones $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sean $F_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $F_n(x)=\int_a^x f_n(s)\,ds$ y $F(x)=\int_a^x f(s)\,ds$ entonces

1. $F_n$ converge uniformemente a $F$ en $[a,b]$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$.

Conclusión: $f_n \not\rightrightarrows f$. (en el ejemplo).

c) Calcular el supremo de $f_n$ en $[0,1]$. // Se los dejo a ustedes.

$$\sup_{x\in Dom} |f_n(x)-f(x)|$$

7c: Estudiar convergencia puntual y uniforme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

* Convergencia puntual:

¿Converge a algo? Fijado $x_0 \in \mathbb{R}$, la serie de números reales

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{x_0^n}{n!}}}_{a_n}$$ es convergente [Criterios de convergencia de cálculo 2].

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}} = \frac{x_0}{n+1} \to 0 \Rightarrow$$ La serie es convergente

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[(\mathbb{R})]{cp} f, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

En resumen, la serie converge puntualmente en todo $\mathbb{R}$. Además afirmo que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Dem: Fijo $x_0 \in \mathbb{R}$, $$\left| \underbrace{e^{x_0}}_{f(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{x_0^n}{n!}}_{\text{Polinomio de Taylor de grado } m \text{ de } e^x} \right| \overset{\text{Taylor}}{=} |r_m(x_0)| \overset{\text{Fórmula del resto}}{=} \left| f^{(m+1)}\underbrace{(c)}_{0 \leq c \leq x_0 \text{ o } x_0 \leq c \leq 0.} \cdot \frac{x_0^{m+1}}{(m+1)!} \right|$$

$$f^{(m+1)}(c) = e^{c} \leq e^{|x_0|}.$$

$$\Rightarrow \left| e^{x_0} - \sum_{n=0}^{m} \frac{x_0^n}{n!} \right| \leq \frac{e^{|x_0|} \, x_0^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0 \quad //$$

es decir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} = e^{x_0}.$

¿Convergencia uniforme?

- No converge uniformemente en $\mathbb{R}$:

Si lo hiciera, entonces $\exists\, m$ tal $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{x} - \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} \right| < 1$

Esto implica $\displaystyle\left| e^{x} - \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} \right| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Tomando límite a $-\infty$

tengo $\displaystyle\left| 0 - \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}}_{\text{Da } +\infty \text{ o } -\infty.} \right| < 1$ ↯.

- Afirmo que $\forall r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente a $e^{x}$ en $[-r, r]$.

**Teo** (Criterio del Mayorante) Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones.
Supongamos que existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales tal que
$\underline{|f_n(x)| \leq A_n \quad \forall n, \forall x \in M}$. y además que $\underline{\sum_{n\geq 1}^{+\infty} A_n \text{ converge}}$.

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $M$.

En $[-r,r]$ se cumple que $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{r^n}{n!} \quad \underline{\forall x \in [-r,r], \forall n}$

Además $\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{n!} \text{ converge}}$.

Conclusión $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \underset{[-r,r]}{\rightrightarrows} e^x$ //

---

$$-2x - 16x^4 = 0 \qquad \boxed{(x,y)}$$

$$-3y + 12y^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \longrightarrow \dfrac{\dot{x}}{x^2} = 1 \xrightarrow{\int} -\dfrac{1}{x} = t + C \Rightarrow x = \dfrac{-1}{t+C} \\ \dot{y} = -y \longrightarrow \dfrac{\dot{y}}{y} = -1 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases}$$

$$-\ln\frac{y}{y_0} = t$$

$\mathrm{Ord}(b^n) < \mathrm{Ord}(n!) < \mathrm{Ord}(n^n)$

$$\left.\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \right]$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$