Teo (Escape de compactos)

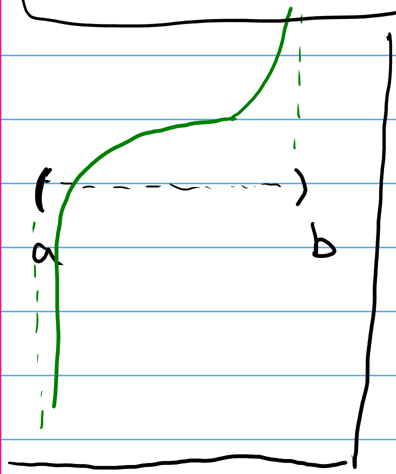
Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con las hip. de Picard, y sea $K \subset \Omega$ compacto y $\varphi: I(t_0,x_0) \to \mathbb{R}^n$ solución maximal. Entonces

$\exists\ t_f \in I(t_0,x_0)$, $t_f > t_0$ y $(t_f, \varphi(t_f)) \notin K$

$\exists\ t_p \in I(t_0,x_0)$, $t_p < t_0$ y $(t_p, \varphi(t_p)) \notin K$

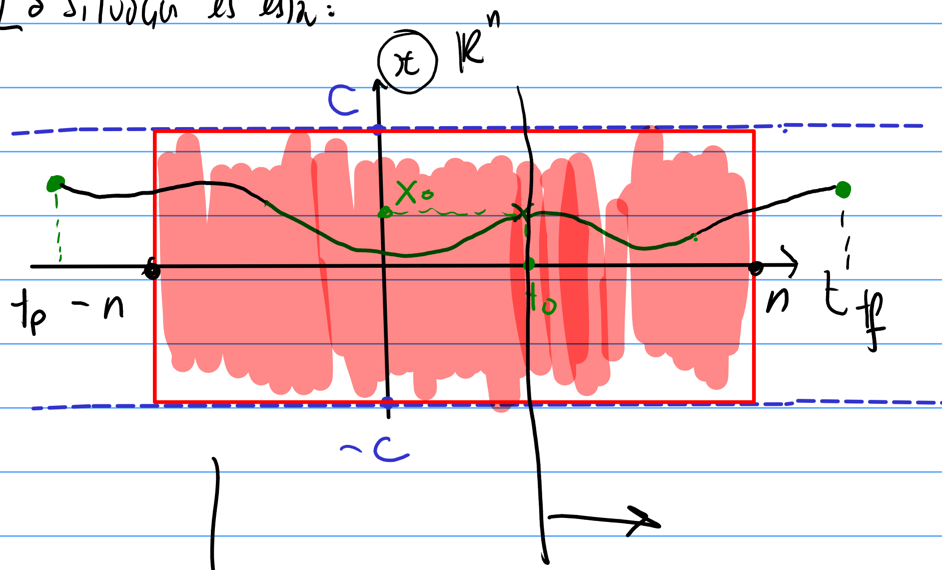
Corolario: $\dot{x} = f(t,x)$, $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en las hip. de Picard y $\varphi: I(t_0,x_0) \to \mathbb{R}^n$ solución maximal entonces

$\boxed{\text{Si } I(t_0,x_0) \neq \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \text{ no es acotada}}$ Si φ es acotada $\Rightarrow I = \mathbb{R}$

$I =$ 

Dem: Si φ es acotada $\to \exists\ C>0$, $\|\varphi(t)\| < C$ $\forall t \in I(t_0,x_0)$

La situación es esta:



Considero $K_n = \{(t,x) : |t| \leq n,\ \|x\| < C\}$

$\exists\ t_f > t_0$, $(t_f, \varphi(t_f)) \notin K$

Como $\|\varphi(t_f)\| < C \Rightarrow t_f > n$

Analogamente $\exists\ t_p < t_0$, tal que $t_p < n$

$\Rightarrow I(t_0,x_0) \supset (-n,n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow I(t_0,x_0) = \mathbb{R}$

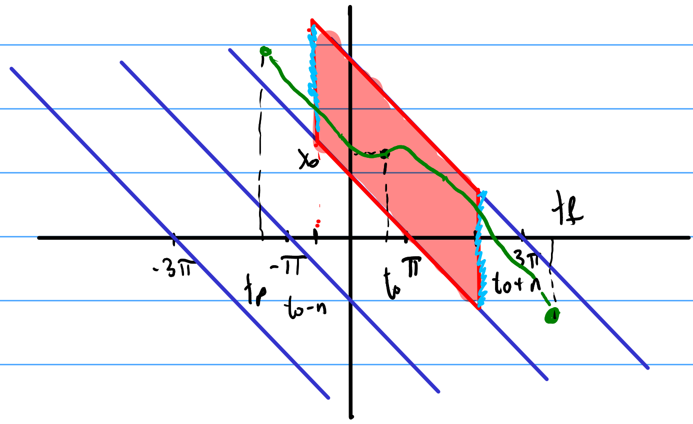
7. Se considera $\dot{x} = \cos(t+x)$

a) Buscar soluciones de la forma $x(t) = at + b$

Quiero $a = \cos((a+1)t + b)\ \forall t \Rightarrow a = -1. \Rightarrow -1 = \cos(b) \Rightarrow b = \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow x_k(t) = -t + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Probar, usando salida de compactos, que todas las soluciones maximales están definidas en todo $\mathbb{R}$.



Sea φ solución maximal con condición inicial (t_0, x_0).

* Si (t_0, x_0) cae en una recta azul, $t + x = \pi + 2\pi k$ $\Rightarrow \varphi(t) = -t + \pi + 2\pi k$ y $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$.

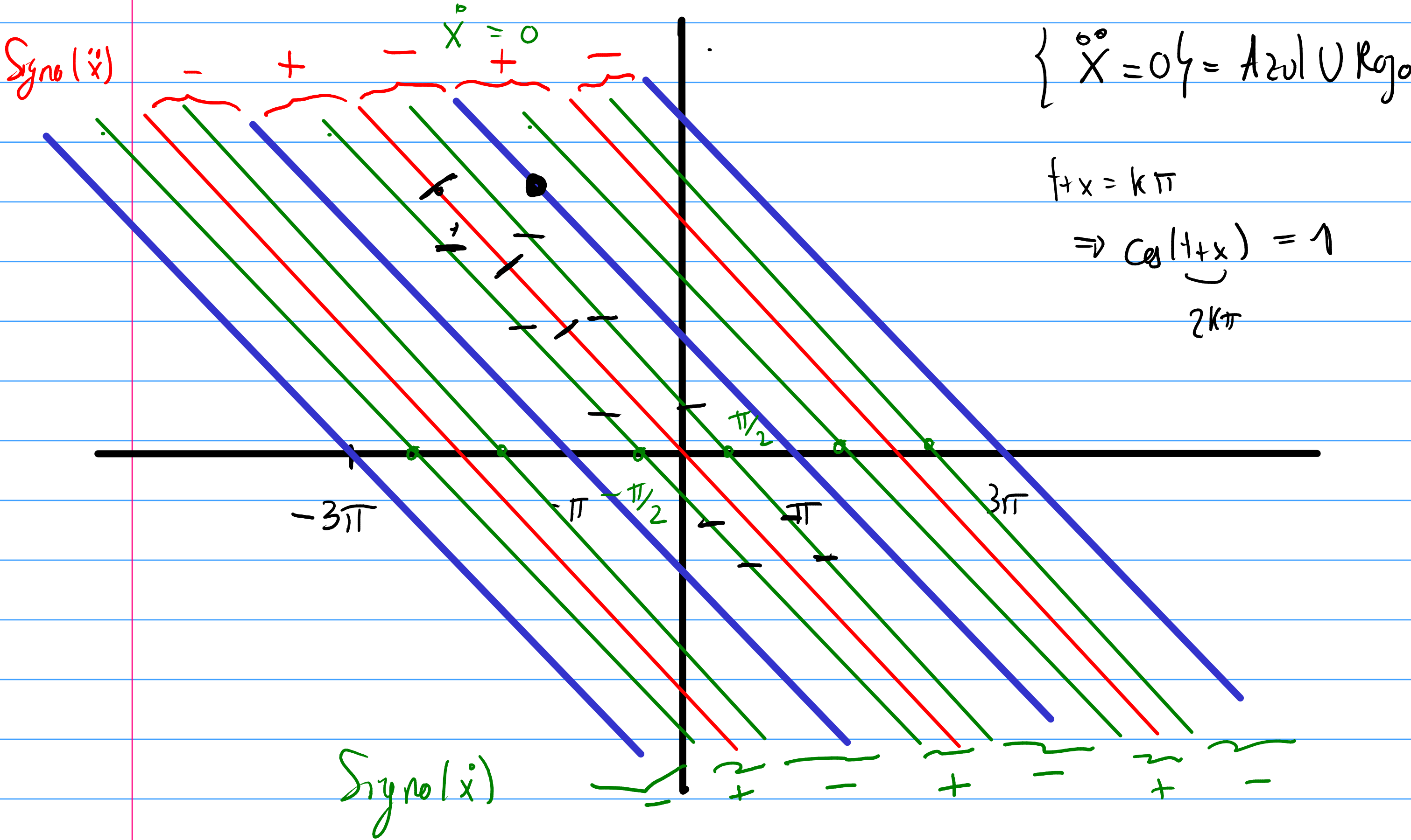
* Si (t_0, x_0) es como en la figura:

Sea K el compacto de la figura: Por escape de compactos en el futuro el gráfico se escapa: $(t_f, \varphi(t_f)) \notin K$. Como no se puede escapar por las rectas azules $\Rightarrow t_f > t_0 + n$ (Se escapa por la tapa celeste)

Análogamente al pasado $\exists\ t_p < t_0,\ t_p < t_0 - n$

$\Rightarrow I(t_0, x_0) \supset (t_0 - n, t_0 + n)\ \forall n \Rightarrow I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$.

c) y d) Bosquejar soluciones, hallar el lugar geométrico de los máximos y mínimos de las soluciones.



$\{\ddot{x}=0\} = \text{Azul} \cup \text{Rojo}$

$t+x = k\pi$

$\Rightarrow \cos(\underbrace{t+x}_{2k\pi}) = 1$

- Signo$(\dot{x})$ = Signo$(\cos(t+x))$, $\cos(t+x)=0 \Leftrightarrow t+x = \pi/2 + 2k\pi$

$t+x = -\pi/2 + 2k\pi$

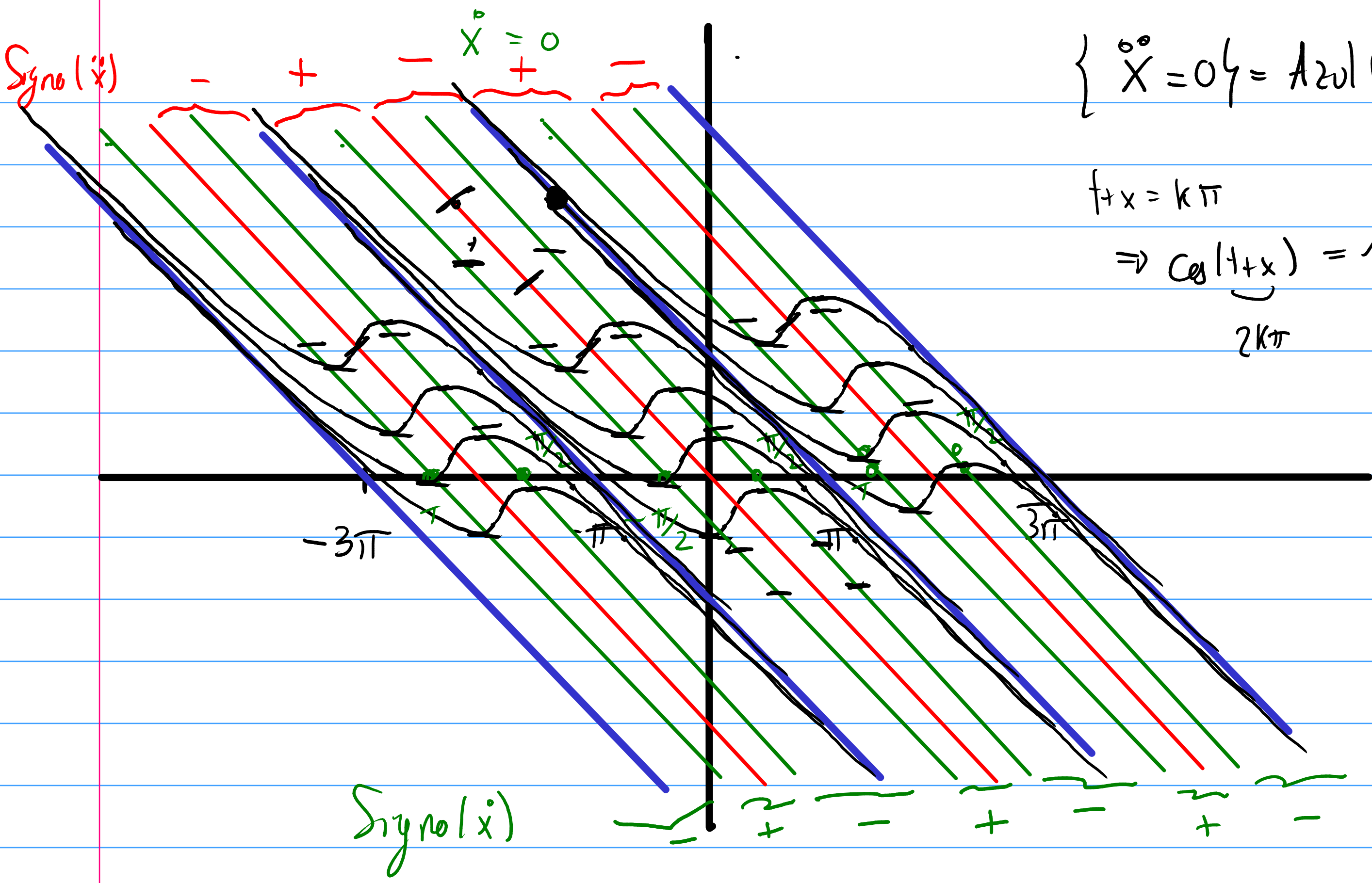
- Observamos que si una solución en un determinado tiempo cae sobre lo verde $\Rightarrow$ cruza $\Rightarrow \{(t,x): \dot{x}=0\} = \{\text{Lo verde}\}$ es lugar geométrico de los extremos

- $\ddot{x}=0$, $\dot{x} = \cos(t+x) \Rightarrow \ddot{x} = -\sin(t+x)(1+\dot{x})$

$= -\sin(t+x)\cdot\underbrace{(1+\cos(t+x))}_{\geq 0} \overset{?}{=} 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t+x) = -1 \Leftrightarrow (t,x) \in \text{Azul} \\ \quad\text{o} \\ \sin(t+x) = 0 \Leftrightarrow t+x = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \{\ddot{x}=0\} = \text{Azul} \cup \text{Rojo}$

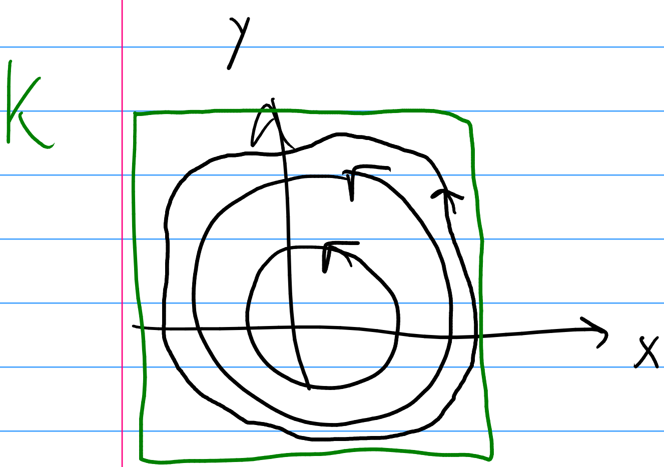
Como las soluciones que comienzan en la recta roja cruzan y ahí cambia el signo de $\ddot{x}$
$\Rightarrow$ La recta roja son puntos de inflexión.



$$\{ \ddot{x} = 0 \} = \text{Azul} \cup \text{Rojo}$$

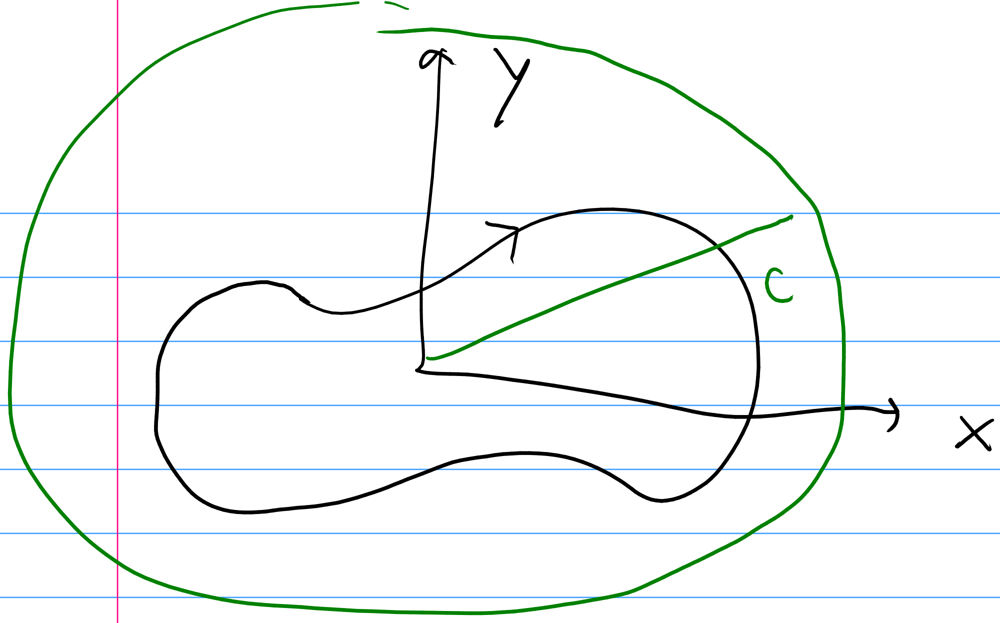
$$t + x = k\pi$$

$$\Rightarrow \cos(\underbrace{t+x}_{2k\pi}) = 1$$



$n = 2$

$$K \subset \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Tiempo}} \times \mathbb{R}^n$$


y
C
x