Teorema (Cetaev)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

1). $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $U-\{\bar{x}\}$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \bar{x}$ y $V(x_n)\leq V(\bar{x})$

2). $\underline{\dot{V}(x)<0}$ $\forall x\in U-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable.

Prop (*)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

(máximo)

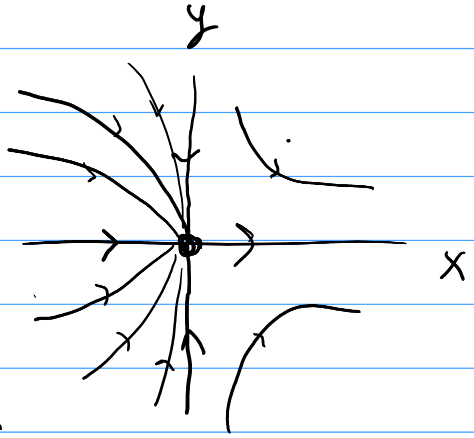
- V tiene un mínimo estricto en $\bar{x}$
- $\dot{V}>0$ $\forall x\in\Omega-\{\bar{x}\}$.

$<$

Entonces $\bar{x}$ es inestable

Ejemplo:

3b) $\begin{cases}\dot{x}=x^2\\ \dot{y}=-y\end{cases}$ $\simeq$



Estudiar estabilidad de $\bar{x}=(0,0)$.

Si quisiera usar Cetaev,

$V(x,y) = ax^2 + by^2$:

$$\dot V = 2a\,x\,\dot x + 2by(-y) = \underbrace{2ax^3}_{\text{MOLESTA, NO SIRVE}} - 2by^2$$

$V(x,y) = ax + by^2$

$\Rightarrow \dot V(x,y) = a x^2 + 2by(-y) = ax^2 - 2by^2$

Tomo $a<0$ y $b>0 \Rightarrow [\dot V(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)]$ 2) ✓

[Además $(0,0)$ no es un mínimo local estricto de V.] 1)

ya que $V(x,0) = ax$ presenta valores menores que 0 en todo entorno de $\bar x = (0,0)$.

Por Cetaev es inestable.

- $V(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

Sobre linealización:

→ $\dot x = f(x)$ $\quad f(x) = \widehat{f(\bar x)} + \overline{Jf(\bar x)\cdot(x-\bar x)} + e(x)$

$$\dot x = \underbrace{f(\bar x)}_{0} + Jf(\bar x)(x-\bar x)$$

→ Es un sistema "lineal"

Teorema de Hartman-Grobman

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ función de clase C^1 y $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$. Entonces

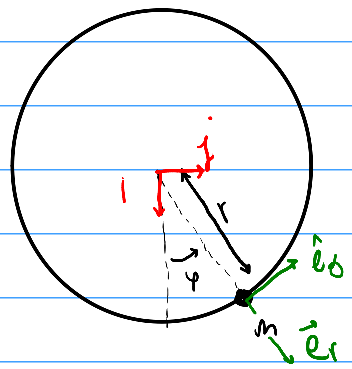
1) Si todos los valores propios de $Jf(\bar{x})$ tienen parte real negativa entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable

2) Si $Jf(\bar{x})$ tiene un valor propio positivo $\Rightarrow$ $\bar{x}$ es inestable

En el 3b) $\underbrace{\begin{cases}\dot{x}=x^2\\ \dot{y}=-y\end{cases}}_{\text{Es inestable}}$ $\rightsquigarrow$ $Jf_{(0,0)}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ no me sirve

$$\underbrace{\dot{z}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}z}_{\text{Es estable}}\quad,\quad z=x-\bar{x}$$

7.



a) Deducir la ecuación del movimiento:

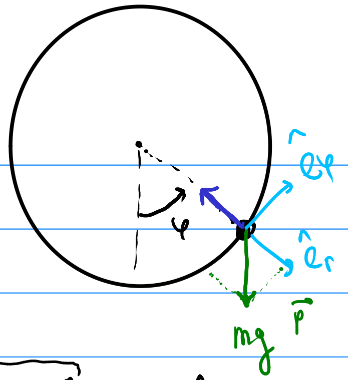
$\vec{e}_r(r,\varphi)=\cos\varphi\,\hat{\imath}+\sin\varphi\,\hat{\jmath}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$

$\vec{e}_\varphi(r,\varphi)=-\sin\varphi\,\hat{\imath}+\cos\varphi\,\hat{\jmath}=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$

$$\vec{r}=r\hat{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{r}}=r(\dot{\hat{e}}_r)=r\,\vec{e}_\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\ddot{\vec{r}}=r\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi+r\dot{\varphi}(-\hat{e}_r\cdot\dot{\varphi})=r\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi-r\dot{\varphi}$$

$m\vec{a} = \vec{F}$



$$\vec{F} = \overbrace{-mg\sin\varphi\,\hat{e}_\varphi + mg\cos\varphi\,\hat{e}_r}^{\vec{P}} + N\hat{e}_r$$

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = mr\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi - mr\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r.$$

$$\Rightarrow \underline{mr\ddot{\varphi}}\,\hat{e}_\varphi - mr\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r \underset{=}{=} \underline{-mg\sin\varphi}\,\hat{e}_\varphi + mg\cos\varphi\,\hat{e}_r + N\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow mr\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

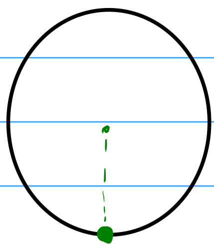
b) Llamemos $k = \sqrt{\frac{g}{r}}$ $\Rightarrow$ $\ddot{\varphi} = -k^2\sin\varphi$

$x = \dot{\varphi}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dot{\varphi} = x \\ \dot{x} = \ddot{\varphi} = -k^2\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dot{\begin{pmatrix}\varphi \\ x\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ -k^2\sin\varphi \end{pmatrix} = f(x,\varphi)$

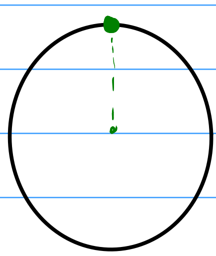
Llamemos $\theta = \dot{\varphi}/k$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dot{\varphi} = k\theta \\ \dot{\theta} = \ddot{\varphi}/k = -k\sin\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(\dot{\varphi},\dot{\theta}) = f(\varphi,\theta)$ con $f(\varphi,\theta) = (k\theta, -k\sin\varphi)$.

c) Hallar puntos críticos: $\begin{cases} k\theta = 0 & \Rightarrow \theta = 0 \\ -k\sin\varphi = 0 & \Rightarrow \varphi = k\pi. \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(\theta,\varphi) = (k\pi, 0)$



$k = 0$ o par



k impar

d) Linealizar alrededor de los puntos de equilibrio y estudiar estabilidad.

$$\begin{cases} \dot\varphi = K\theta \\ \dot\theta = \frac{\ddot\varphi}{K} = -K\sin\varphi \end{cases}$$

$f(\varphi,\theta) = (K\theta, \underbrace{-K\sin\varphi}).$

$$J_{f(\varphi,\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Si $(\varphi,\theta) = (2K\pi, 0) \Rightarrow J_f(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ -K & 0 \end{pmatrix}$, valores propios $\pm Ki$

$\Rightarrow$ No puedo afirmar nada

Si $(\varphi,\theta) = ((2K+1)\pi, 0) \Rightarrow J_f(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}$, valores propios $\pm K$.

HG

$\Rightarrow$ son inestables.

e) Si $(\varphi(t),\theta(t))$ es solución probar que $V(\varphi(t),\theta(t)) = cte$ con

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi.$$

Alcanza con ver que $\underbrace{\frac{d}{dt} V(\varphi(t),\theta(t))}_{} = 0$

Es lo que llamamos $\dot V(\varphi,\theta)$.

$$\dot V(\varphi,\theta) = \theta\dot\theta + \operatorname{sen}\varphi\,\dot\varphi = \theta(-K\sin\varphi) + \operatorname{sen}\varphi(K\theta) = 0$$

- Cuando una función cumple esto (es cte a lo largo de las órbitas $\Leftrightarrow \dot V = 0$) se le llama preintegral
- V se puede interpretar físicamente: $\frac{1}{2}\theta^2 \simeq$ energía cinética, $-\cos\varphi \simeq$ energía potencial $\Rightarrow$ V es la energía.

$\dot{V}=0$ quiere decir que la energía se conserva

f) Completar el estudio de estabilidad.

V cumple Lyapunov 1 en $(\varphi,\theta)=(2k\pi,0)$ ya que

1) $V(\varphi,\theta)=\frac{1}{2}\theta^2-\cos\varphi$ tiene mínimo local estricto ahí.

2) $\dot{V}=0\leq 0$.

$\Rightarrow$ Son estables.

g) Esbozar un diagrama de fase: $\dot{V}=0 \Leftrightarrow V(\varphi(t),\theta(t))=cte$

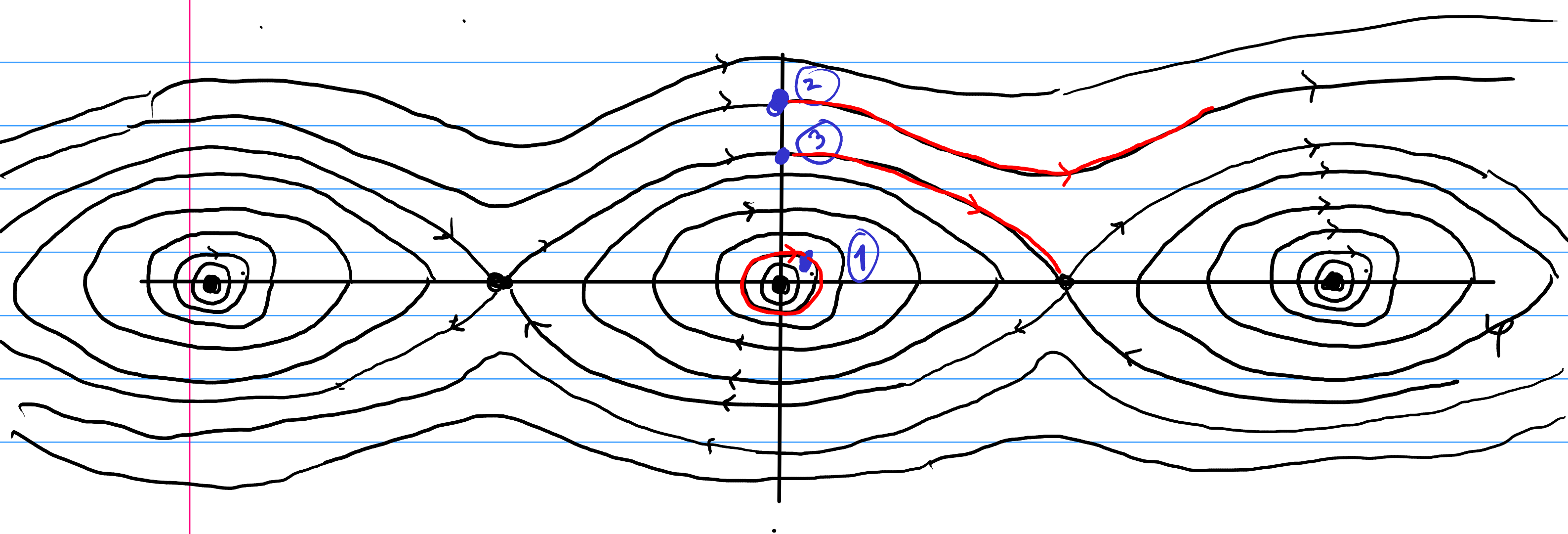
$\Rightarrow$ Las órbitas de las soluciones se mantienen dentro de las curvas de nivel de V

$\Rightarrow$ Dibujando las curvas de nivel tengo el diagrama de fase.

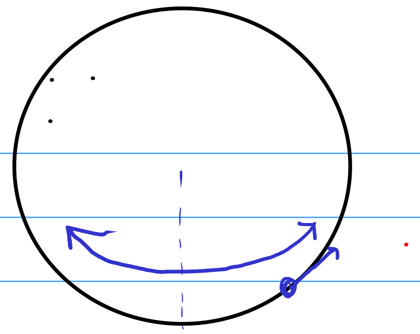
$V(\varphi,\theta)=C \Leftrightarrow \frac{\theta^2}{2}-\cos\varphi=C \to \theta=\sqrt{2C-2\cos\varphi}$

$\searrow \theta=-\sqrt{2C-2\cos\varphi}$

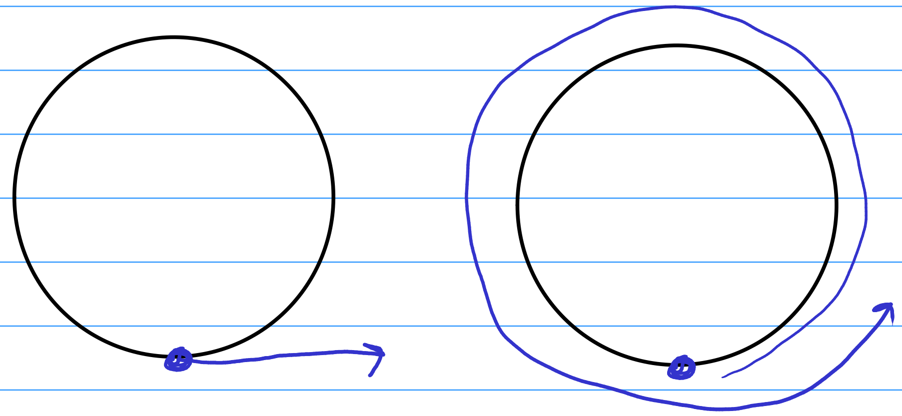
HACER ESTUDIO ANALÍTICO Y GRAFICAR



1

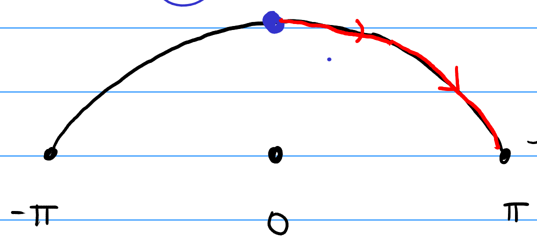


2



3

3



No atraviesa el pto de equilibrio, no llega. Demora ∞ en llegar.