# Transformada de Laplace

Vamos a trabajar con funciones $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua a trozos

**Def:** Llamamos transformada de Laplace de $f$ a la siguiente función

$$\underbrace{\mathcal{L}[f]}(s) = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)e^{-st}}_{t\in\mathbb{R}} dt \in \mathbb{C}$$

, para los $s\in\mathbb{C}$, donde converge

Es una función de variable compleja.

**Ejemplo 1:** $f(t)=1 \ \forall t\geq 0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} 1\cdot e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to+\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^T$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} - \underbrace{\lim_{T\to+\infty}\frac{e^{-sT}}{s}}\ \underset{Re(s)>0}{=}\ \frac{1}{s}$$

El dominio de $\mathcal{L}[1]$ es $\{s\in\mathbb{C} \mid Re(s)>0\}$.

$e^{-sT} = e^{-aT}\,e^{-ibT} \to \cos(bT)+i\,sen(bT)$

$\underbrace{s=a+ib}$

No juega en el límite si $a\neq 0$, ya que el módulo vale 1

si $a>0$: $\dfrac{e^{-\infty}}{s}=0$

si $a<0$: $\dfrac{e^{+\infty}}{s}\ \nexists$

$Re(s)=0$

Tampoco converge: $\lim_{T\to+\infty}\underbrace{e^{-ibT}} = \lim_{T\to+\infty} \cos(bT) - i\,\underbrace{sen(bT)}$ oscila, no converge.

1 y -1

**Ejemplo 2:** $f(t)=e^{at}$, $a\in\mathbb{R}$.

$\mathcal{L}[f](s) = \dfrac{1}{s-a}$, con dominio $\{s\in\mathbb{C} \mid Re(s)>a\}$.

**Ejemplo 3:** $f(t)=\sin(\omega t)$, $\mathcal{L}[f](s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\{s\in\mathbb{C} \mid Re(s)>0\}$

## Propiedades:

1) Es lineal: $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$

2) Traslación en frecuencia: $\mathcal{L}[f(t) \cdot e^{at}](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-a)$

Ejemplo: $\mathcal{L}[e^{at} \cdot \sin bt](s) = \mathcal{L}[\sin bt](s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

$\mathcal{L}[\sin bt](s) = \frac{b}{s^2+b^2}$

3) Transformada de la derivada:

Si $f'$ es continua $\forall t \geq 0$ entonces

$\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$

"Transforma la derivada en multiplicar por s"

Ecuación algebraica cuya incógnita es $\mathcal{L}(x)(s)$.

Ejemplo: $\begin{cases} \dot{x} + ax = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \underbrace{\mathcal{L}(\dot{x})(s)} + a \cdot \mathcal{L}(x)(s) = 0$

Incógnita es $x(t)$

$(s \cdot \mathcal{L}(x)(s) - 2) + a\,\mathcal{L}(x)(s) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(s) \cdot (s+a) - 2 = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(x)(s) = \boxed{\frac{2}{s+a}} \longrightarrow x(t) = 2e^{at}$

Busco $x$ continua

Todavía no encontré $x(t)$, pero encontré $\mathcal{L}(x(t))$.

¿A partir de $\mathcal{L}(x(t))$ puedo encontrar $x(t)$? Necesito una inversa !!

¿$\mathcal{L}$ es invertible? ¿Si $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$, tiene sentido decir que $x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s))$?

El enemigo sería que $\exists$ $f_1$ y $f_2$ dos funciones tal que $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2]$.

Ejemplo: $f_1(t) = 0 \; \forall t$, $f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{si } t>0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2] = 0$

**Teo:** Sean $f_1$ y $f_2$ dos funciones continuas y de orden exponencial, si $\mathcal{L}[f_1] = \mathcal{L}[f_2] \Rightarrow f_1 = f_2$.

$f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si $\exists M>0, \alpha$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

[ $f(t) = t^t$ No, $f(t) = e^{t^2}$ No ]

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 1 \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(s)\cdot(s^2+as+b) = 1/s$$

Ejemplo: $\begin{cases} \dddot{x} + 5\ddot{x} + 9\dot{x} + 5x = 1 \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0 \end{cases}$ | $X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$

$$\dddot{x} + 5\ddot{x} + 9\dot{x} + 5x = 1 \xRightarrow{\mathcal{L}} \underbrace{\mathcal{L}(\dddot{x})}_{s\cdot\mathcal{L}(\ddot{x}) - \underbrace{\ddot{x}(0)}_{0}} + 5\overbrace{\mathcal{L}(\ddot{x})}^{s\cdot\mathcal{L}(\dot{x}) - \underbrace{\dot{x}(0)}_{0}} + 9\mathcal{L}(\dot{x}) + 5\mathcal{L}(x) = 1/s$$

$$s\mathcal{L}(x) - \overset{0}{x(0)}$$

$$\Rightarrow s\underbrace{\mathcal{L}(\ddot{x})}_{s\mathcal{L}(\dot{x})} + 5s\mathcal{L}(\dot{x}) + 9sX(s) + 5X(s) = 1/s$$

$$\Rightarrow s^2\underbrace{\mathcal{L}(\dot{x})}_{sX(s)} + 5s^2X(s) + 9sX(s) + 5X(s) = 1/s$$

$$\Rightarrow X(s)\cdot(s^3 + 5s^2 + 9s + 5) = 1/s$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s(s^3+5s^2+9s+5)}, \quad ¿x(t)? \quad \mathcal{L}^{-1}(X(s))$$

$$s^3+5s^2+9s+5 = (s+1)\cdot(\underbrace{s^2+4s+5}_{-2\pm i\cdot 1}) \overset{\text{Completo cuadrados}}{=} (s-(-2))^2 + 1^2 = (s+2)^2+1$$

Raíz -1 evidente

$$X(s) = \boxed{\frac{1}{s\cdot(s+1)\cdot((s+2)^2+1)}} = \frac{A}{s} + \boxed{\frac{B}{s+1} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2+1}}$$

- Multiplico por $s$: $\frac{1}{(s+1)((s+2)^2+1)} = A + \underbrace{\left(\frac{B}{s+1} + \frac{C(s+2)+D}{(s+2)^2+1}\right)}_{\to\, \alpha \neq 0} \cdot \underbrace{s}_{0}$

$\Rightarrow s \to 0$ $\boxed{\frac{1}{5} = A}$

- $\underline{B}$: multiplico x $s+1$ y $s \to -1$: $\dfrac{1}{-1\cdot 2} = B \Rightarrow B = \frac{-1}{2}$

- $C, D$: multiplico por $(s+2)^2+1$ y $s \to -2+i$:

$$\frac{1}{(-2+i)\cdot(-1+i)} = Ci + D \qquad \Rightarrow C = \frac{3}{10}, \; D = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1-3i} = \frac{(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i}{10}$$

$$X(s) = \frac{1}{5s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{\frac{3}{10}(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{\frac{1}{10}}{(s+2)^2+1}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X)(t) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\underbrace{s+1}}\right) + \frac{3}{10}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\boxed{s+2}}{(\boxed{s+2})^2+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{10}\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\underbrace{(s+2)^2+1}}\right)} \quad -2 \pm i\,1$$

$$x(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + \frac{3}{10}e^{-2t}\cdot\cos(t) + \frac{1}{10}e^{-2t}\cdot\sin(t)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}\cdot\sin bt](s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$\underline{\text{Obs}}$: $\ddot{x} + \dots\dots + 5x = 1$, $\dddot{x} + \dots + 5x = f(t)$

$\Downarrow \mathcal{L}$

$$X(s)(s+1)\cdot(s^2+4s+5) = F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)}\cdot F(s)$$