Def: Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = f(x)$. Decimos que $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio si $f(\bar{x}) = 0$. Decimos que $\bar{x}$ es:

- **Estable:** si $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0$ tal que si: $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_{x_0}(t) - \bar{x}\| < \varepsilon\ \forall t > 0$.

donde $\varphi_{x_0}: I_{x_0} \to \mathbb{R}$ es la solución de $\begin{cases} \dot{\varphi}_{x_0} = f(\varphi_{x_0}) \\ \varphi_{x_0}(0) = x_0 \end{cases}$

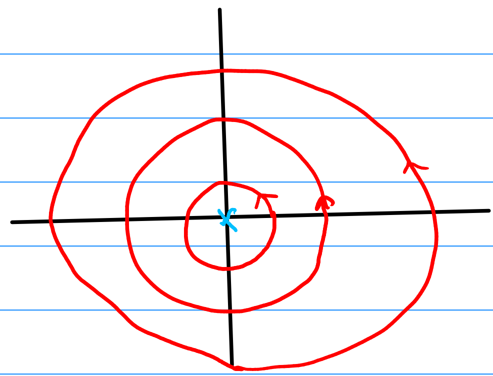
[Observación: $I_{x_0} \supset [0, +\infty)$].

- **Asintoticamente estable** si es estable y además $\exists\, \delta > 0$ tal que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{x_0}(t) = \bar{x}$.

- **Inestable:** si no es estable.

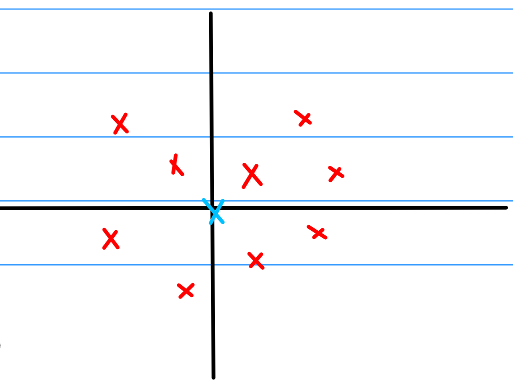
Ejercicio 1b) Dar un ejemplo de una ecuación diferencial que tenga un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente, y además admita una trayectoria (distinta del equilibrio) que se tienda en el futuro a dicho punto

$\dot{X} = AX$ con valores propios imaginarios puros $\rightsquigarrow$



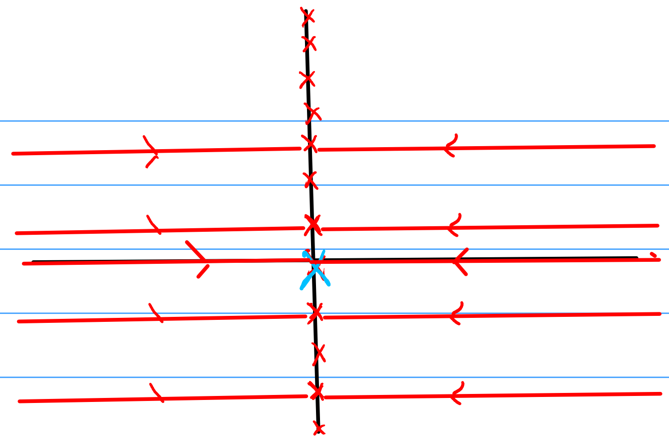
Cumple todo menos la última condición:
no hay soluciones que tiendan al equilibrio.

$$\dot{X} = 0 \cdot X = \vec{0}$$

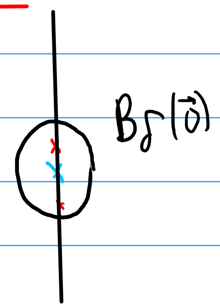


Cumple todo menos la última condición:
no ha soluciones que tiendan al equilibrio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Es estable,
no es asintóticamente estable ya que



todo entorno del origen contiene otros puntos de equilibrio que por ser de equilibrio se mantienen a distancia cte de $\bar{x} = (0,0)$.

Además existe una solución que converge a $\bar{x}$: $\varphi(t) = (e^{-t}, 0)$. //

5. Determinar los valores de los coeficientes a y b que hacen que

$V(x,y) = ax^2 + by^2$ sea una función de Lyapunov para cada uno de los siguientes casos.

Es decir, que cumpla las hipótesis de alguno de los teoremas de Lyapunov.

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -2x^2y - y^3 \end{aligned}$$

Repaso: Teorema (Lyapunov 1)

Sea $\bar{x}$ punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con hipótesis de Picard y $U \subset \Omega$ abierto, con $\bar{x} \in U$. Si $\exists\ V: U \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\bar{x}$ es un mínimo estricto de V
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$.

$\Rightarrow \bar{x}$ es estable.

$\star$ $\dot{V}: U \to \mathbb{R}$, $\quad \dot{V}(x) := \dfrac{d V(\varphi_x(t))}{dt} = \boxed{\nabla V(x) \cdot f(x)}$

$$\frac{d\, V(\varphi(t))}{dt} = \nabla V(\underbrace{\varphi(t)}_{x}) \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(t)}_{f(x)}$$

Teorema (Lyapunov 2)

Sea $\bar{x}$ punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con hipótesis de Picard y $U \subset \Omega$ abierto, con $\bar{x} \in U$. Si $\exists$ $V: U \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\bar{x}$ es un mínimo estricto de V
2. $\dot{V}(x) < 0$ $\forall x \in U \setminus \{\bar{x}\}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

b) $\dot{x} = -x^3 + xy^2$
$\quad \dot{y} = -2x^2y - y^3$

$V(x,y) = ax^2 + by^2$, $\quad a, b > 0$ ((0,0) sea mínimo estricto).

El punto de equilibrio es el origen (es el único).

$$\dot{V}(x,y) = 2ax \cdot \dot{x} + 2by\,\dot{y} = \overbrace{2ax}^{\frac{\partial V}{\partial x}} \overbrace{(-x^3 + xy^2)}^{f_1} + \overbrace{2by}^{\frac{\partial V}{\partial y}} \overbrace{(-2x^2y - y^3)}^{f_2}$$

$$= -2ax^4 + 2ax^2y^2 - 4bx^2y^2 - 2by^4 = -\underbrace{2a}_{>0}x^4 - \underbrace{2b}_{>0}y^4 - \underbrace{(4b-2a)}_{>0}x^2y^2 < 0 \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Pido $4b - 2a \geq 0$

$\Rightarrow V(x,y) = 2x^2 + y^2$. Cumple Lyapunov 2 $\Rightarrow$ Asintóticamente estable.

c) $\dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2$ $\qquad V(x,y) = ax^2 + by^2$, $\underline{a,b>0}$

$\dot{y} = -y^3$

(0,0) es el punto de equilibrio

$$\dot{V}(x,y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = 2ax\left(-\frac{x^3}{2} + 2xy^2\right) + 2by(-y^3)$$

$$\boxed{= -ax^4 + 4ax^2y^2 - 2by^4} = -aX^2 + 4aXY - 2bY^2$$

$X = x^2$, $Y = y^2$; Quiero que $-aX^2 + 4aXY - 2bY^2 < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

y eso es lo que en gal se llamaba forma cuadrática definida negativa

La forma cuadrática es definida negativa $\Leftrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} -a & 2a \\ 2a & -2b \end{pmatrix}$

tiene valores propios negativos.

<u>Obs:</u> $\overbrace{tr(A)}^{\lambda_1+\lambda_2} = -a - 2b < 0 \Rightarrow$ Hay un valor propio negativo.

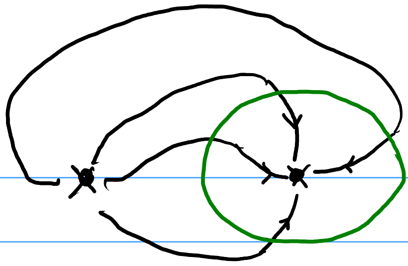
$\det(A) > 0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ y λ_2 tienen el mismo signo.

$\Rightarrow$ λ_1 y λ_2 son negativos.

$$2ab - 4a^2 > 0 \rightsquigarrow 2ab > 4a^2 \Leftrightarrow \boxed{2b > 4a}$$

Si $a,b>0$ y $2b>4a \Rightarrow V$ cumple Lyapunov 2 $\Rightarrow$ el origen es asintóticamente estable.

$(a = 1, b = 3)$.



U , $V: U \to \mathbb{R}$.

6. $V(x,y) = x^2+y^2$ ver que es una función de Lyapunov estricta para

$$\begin{cases} \dot{x} = -x/2 - y/2 - x^2 - xy \\ \dot{y} = -x/4 - y/2 - y^2 - xy/2 \end{cases}$$

en algún entorno de $\underline{(0,0)}$.

HACER.

$$\dot{V}(x,y) = -x^2 - y^2 - \frac{3xy}{2} - 2x^3 - 2y^3 - xy^2$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Op1) Ver que $(0,0)$ es un máximo estricto local de $\dot{V}(x,y)$.

Op2) $$\dot{V}(x,y) = -x^2(1+2x) - y^2(1-2y-x) - \frac{3xy}{2}$$
$$< -x^2(1-2\varepsilon) - y^2(1-\varepsilon) - \tfrac{3}{2}xy$$

$|x|<\varepsilon$
$|y|,|x|<\delta \Rightarrow |2y+x|<\varepsilon$

$$\begin{pmatrix} -(1-2\varepsilon) & -3/4 \\ -3/4 & -(1-\varepsilon) \end{pmatrix} \to (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon) - 9/16 > 0$$

Si ε es chico.

Dominio de V para que funcione.

Conclusión: $\bar{x}=(0,0)$ es asintóticamente estable.