Ejercicio 9 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''_n(x) = f_{n+2}(x)(n+2)(n+1) - f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$f_0(x) = e^x, \quad f_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{2n+1}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, y que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{2n}(x) = \dfrac{2^n e^x}{(2n)!}$

* $f_{2n}(x) = \dfrac{2^n e^x}{(2n)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Caso base: $f_0(x) = e^x$ ✓

Caso inductivo: $f_{2(n+1)}(x) = f_{2n+2}(x) = \dfrac{f''_{2n}(x) + f_{2n}(x)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{\left(\dfrac{2^n e^x}{(2n)!}\right)'' + \dfrac{2^n e^x}{(2n)!}}{(n+2)(n+1)}$

$$f''_n(x) = f_{n+2}(x)(n+2)(n+1) - f_n(x)$$

$\uparrow$ $2n$ $\quad \uparrow$ $2n$ $\quad \uparrow$ $2n$ $\quad \uparrow$ $2n$ $\quad \uparrow$ $2n$

$$= \frac{2^{n+1} e^x}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{2^{n+1} e^x}{(2n+2)!} = \frac{2^{n+1} e^x}{(2(n+1))!} \quad ✓$$

$$\forall P \subset \mathbb{N}, \left[(0 \in P) \wedge (n \in P \Rightarrow n+1 \in P) \Rightarrow P = \mathbb{N}. \right]$$

b) Se considera la ecuación $u_{tt} = u_{xx} + u$, $-L < x < L$, $0 < t < 1$

1) Buscar soluciones de la forma $u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n$

dando una fórmula para las $g_n(x)$

Buscamos un candidato a solución; para poder llegar a una fórmula asumo que converge, es derivable, lo derivado pasa para adentro, etc.

$u_{tt} = u_{xx} + u$

$$\partial_t^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n\right) - \partial_x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)\, n(n-1) t^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} g_n''(x) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} g_{n+2}(x)(n+2)(n+1) t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} g_n''(x) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n$$

Entonces voy a exigir que $g_{n+2}(x)\,(n+2)(n+1)\,t^n - g_n''(x)\,t^n = g_n(x)\,t^n$

$$\Leftrightarrow g_{n+2}(x)(n+2)(n+1) - g_n(x) = g_n''(x)$$

Para usar la parte a) voy a pedir que $g_0(x) = e^x$, $g_1(x) = 0 \ \forall x$

$$\underset{a)}{\Rightarrow} g_{2n}(x) = \frac{2^n e^x}{(2n)!} \text{ y } g_{2n+1}(x) = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}(x) t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k \cdot e^x}{(2k)!} t^{2k}$$

ES UN CANDIDATO A SOLUCIÓN.

b) Verificar que el candidato es una solución: "Ver que la solución es efectiva!"

$*$ Bien definida: $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k \cdot e^x}{(2k)!} t^{2k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}$, ¿Converge?

$-L < x < L,\ 0 < t < 1$

$$\left|\frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{2^k e^L}{(2k)!} \quad y \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k \cdot e^L}{(2k)!} \quad \text{Converge}$$

entonces por el mayorante de Weierstrass el límite existe y es uniforme, es decir.

$$S_n(x,t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!} \quad \text{Converge uniformemente}$$

$u(x,t)$ se define como $\lim_{n\to+\infty} S_n(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}$

* Se sigue que la función $u(x,t)$ es continua, por ser una serie de funciones continuas que converge uniformemente.

- Derivable 2 veces respecto a x: $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!} = e^x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^{2k}}{(2k)!}$

$$\Rightarrow \partial_x u(x,t) = (\partial_x e^x) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^{2k}}{(2k)!} = e^x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^{2k}}{(2k)!} = u(x,t)$$

$$\Rightarrow \partial_x^2 u = \partial_x u = u.$$

- Derivable respecto a t: $\cdot\ S_n(x,t) \rightrightarrows u$

Ahora $\partial_t S_n(x,t) = \partial_t \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k e^x (2k) t^{2k-1}}{(2k)!}$

$$y \quad \left|\frac{2^k e^x (2k) t^{2k-1}}{(2k)!}\right| \leq \frac{2^k e^L (2k)}{(2k)!} \quad y \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k e^L (2k)}{(2k)!} < +\infty$$

$\Rightarrow$ Por MW, $\partial_t S_n(x,t) \rightrightarrows v$.

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ S_n(x,t) \rightrightarrows u \\ \cdot\ \partial_t S_n(x,t) \rightrightarrows v \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} u \text{ es derivable respecto al tiempo y} \\ \partial_t u = v. \end{array}$$

Es decir; $\partial_t S_n(x,t) \rightrightarrows \partial_t u$, es decir, $\partial_t\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right) \rightrightarrows \partial_t\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right)$

es decir, $\sum_{k=0}^{n} \partial_t\left(\frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right) \rightrightarrows \partial_t\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right)$

es decir $\sum_{k=0}^{+\infty} \partial_t\left(\frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right) = \partial_t\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k e^x t^{2k}}{(2k)!}\right)$

- Derivable 2 veces respecto a t:

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ S_n(x,t) \rightrightarrows u \\ \cdot\ \partial_t S_n(x,t) \rightrightarrows v \\ \cdot\ \partial_t^2 S_n(x,t) \rightrightarrows \zeta \quad (\text{usando MW}) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

u es dos veces derivable respecto a t y $v = \partial_t u$, $\zeta = \partial_t^2 u$

Esto implica que la serie es derivable 2 veces y que vale pasar las derivadas para adentro.

$\Rightarrow$ u es C^2 y $\partial_t, \partial_t^2, \partial_x, \partial_x^2$ pasan para adentro.

Falta verificar que $u_{tt} - u_{xx} = u$, $u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}(x) t^{2k}$, con $g_{2k}(x) = \frac{2^k e^x}{(2k)!}$

$$\partial_t^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}(x) t^{2k}\right) - \partial_x^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}(x) t^{2k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} g_{2k}(x)(2k)(2k-1)t^{2k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}''(x) t^{2k} =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k+2}(x)(2k+2)(2k+1)t^{2k} - g''_{2k}(x)t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(g_{2k+2}(x)(2k+2)(2k+1) - g''_{2k}(x)\right)}_{g_{2k}(x)} t^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} g_{2k}(x)\, t^{2k} = u(x,t)$$

$\Rightarrow$ Se satisface la EDP.

- $u_t = u_{xx}$,

Variables separables $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \text{ constante}$$

$u(t,0) = 0 \Leftrightarrow T(t)X(0) = 0 \ \forall t > 0 \longrightarrow X(0) = 0$

$u_x(t,\pi) = 0 \Leftrightarrow T(t)X'(\pi) = 0 \ \forall t > 0 \rightarrow X'(\pi) = 0$

Caso $\mu < 0$: $\mu = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$. Luego $X'(x) = \alpha B\cos(\alpha x)$. Para que $X'(\pi) = 0$

pido que $\cos(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Luego $T'(t) = -\alpha^2 T(t) \Rightarrow T(t) = A e^{-\alpha^2 t}$

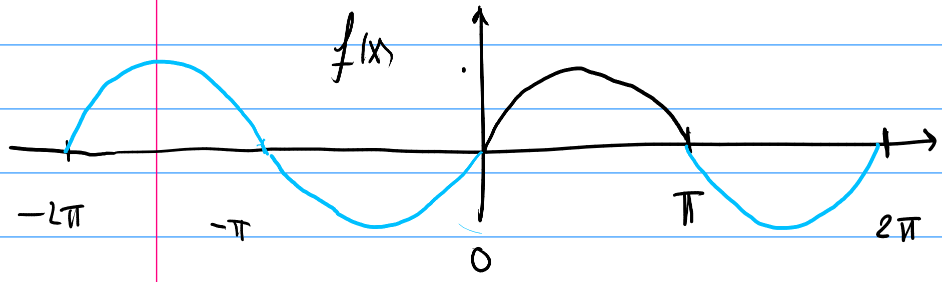
$$\Rightarrow u_k(x,t) = B_k \sin\left(\frac{(2k+1)}{2}x\right) e^{-\left(\frac{(2k+1)}{2}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} B_k \sin\left(\frac{(2k+1)}{2}x\right) e^{-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 t}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

?

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{B_k} \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)}{2}x\right) = x(x-\pi) \quad \text{si} \quad 0 < x < \pi.$$

$$\Rightarrow \pi/L = \frac{1}{2} \Rightarrow L = 2\pi$$



Calculo serie de Fourier: $\quad a_0 = 0, \; a_k = 0$ pues es impar

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin\left(\frac{k}{2}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par.} \\ b_k & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \quad [\text{Calcular}]$$

$\Rightarrow$

Dni:

$$x(x-\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)$$

B_k