Wednesday, August 11, 2021 7:32 PM

Clase 3, Práctico 1.

Afirmación: Si tenemos una ecuación diferencial lineal, a coeficientes constantes, de orden m, entonces el espacio de soluciones de la ecuación homogénea es un (sub)espacio vectorial, de dimensión m.

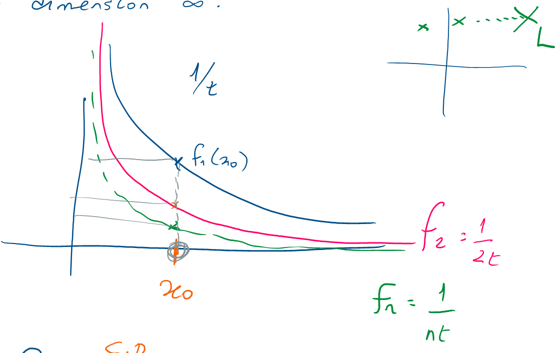
IMPORTANTE: Afirmamos esto antes de resolver la ecuación.

Pregunta: $\mathcal{H} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi\ C^\infty\}$, es un espacio vectorial, tomando $\mathbb{R}$ como escalares.

¿Qué dimensión tiene?

Observar que en este espacio viven todos los polinomios y el conjunto $\mathcal{P}_n = \{$ Polinomios de grado $\leq n \}$ tiene dim $n+1$.

$\Rightarrow \mathcal{H}$ tiene dimensión ∞.



$$f_n \xrightarrow{c.p} 0$$ en $(0,+\infty)$.

$$\int_0^{\infty} f_1 = +\infty \qquad \int_0^{\infty} f_2 = +\infty \;, \dots \qquad \int_0^{+\infty} f_n = +\infty .$$

Pero $\int_0^{+\infty} 0 = 0$ $\qquad f_n \longrightarrow f$

$\int f_n \not\to \int f$!

Dem af: Cuentitas para orden $m = 2$.

Tenemos $\underline{x'' + ax' + bx = 0}$ $\circledast$

$S_H = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq φ es solución de $\circledast\}$.

- $0 \in S_H$ ✓
- Si $\varphi \in S_H$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in S_H$

$(\lambda\varphi)'' + a(\lambda\varphi)' + b(\lambda\varphi) = \lambda(\varphi'' + a\varphi' + b\varphi) = 0$ ✓

- Si $\varphi, \psi \in S_H \Rightarrow \varphi + \psi \in S_H$

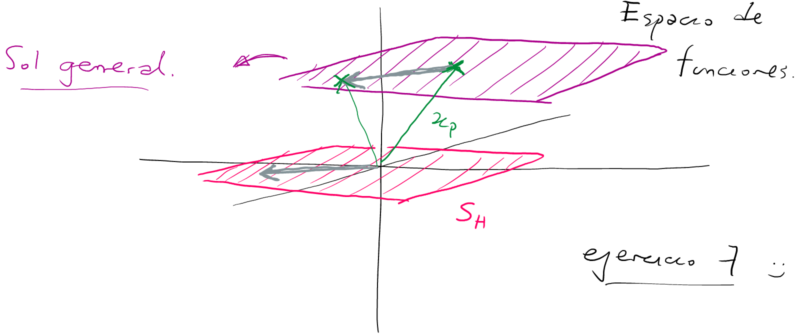
Clave: $(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi'$.

Resta ver que $\dim(S_H) = m$ orden de la ecuación.

Idea: Con m condiciones iniciales determino
la solución unívocamente.

Pensando en $\boxed{x''} + \underline{ax'} + \underline{bx} = 0$, si tomamos

$x(0)$, $x'(0)$ $\Rightarrow$ $m=2$ grados de libertad.



ejercicio 7 :)

Af 2: Si φ, ψ resuelven la ecuación original ($x''+ax'+bx=c(t)$) entonces su diferencia $\varphi-\psi$ resuelve la ec. homogénea.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi''+a\varphi'+b\varphi=c(t)\\ \psi''+a\psi'+b\psi=c(t)\end{array}\right\}\ (\varphi-\psi)''+a(\varphi-\psi)'+b(\varphi-\psi)=0.$$

Ejercicio 16: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ alguien. Sabemos que

$x(t)=k_1e^{t}+k_2e^{-t}+g(t)$ es sol de

$$\circledast\quad x''+ax'+bx=-\cos t\ ;\quad \boxed{\forall\, k_1,k_2\in\mathbb{R}}.$$

Hallar a, b.

Sol: $k_1=k_2=0 \Rightarrow g(t)$ resuelve $\circledast$.

Además $x_{k_1,k_2}(t)$ también resuelve $\circledast$ $\forall\, k_1,k_2$.

⇒ Su diferencia $x_{k_1,k_2} - y = k_1 e^t + k_2 e^{-t}$

resuelve $x'' + ax' + bx = 0$. (homogénea).

→ $P_\lambda = 1 \cdot \lambda^2 + a\lambda + b$ tiene raíces ± 1.

$$\Rightarrow P_\lambda = 1(\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 0, \quad b = 1}$$

Ej 14: Hallar $a \in \mathbb{R}$ tq

- $x'' + ax' - 2x = 0$

$\Updownarrow$

- $x'' - 2x' + ax = 0$

tengan soluciones comunes además de $\varphi(t) \equiv 0$.

Aproximación 1: $\lambda^2 + a\lambda - 2$; $\lambda^2 - 2\lambda + a$

tienen (por lo menos) una raíz común.

$$\lambda^1_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8\lambda}}{2} \quad ; \quad \lambda^2_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}$$

LLORO. $\lambda^1_+ = \lambda^2_+$; $\lambda_1^+ = \lambda_2^-$; . . . . . ☹

Ingenio: Igualo y resto: $\cancel{x''} + ax' - 2x = \cancel{x''} - 2x' + ax$

$$\Longleftrightarrow (a+2)x' = (a+2)x$$

Dos opciones: $\boxed{a = -2}$ ó $x' = x$.

$\downarrow$

$k \cdot e^t$ es solución de ambas! TERMINAR.