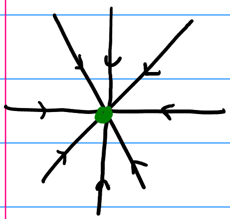
Def: Sea $\dot{X} = AX$

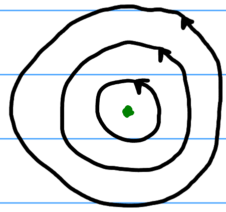
- Decimos que una solución $X(t)$ es estable si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $\forall Y(t)$ solución se cumple $\|Y(0) - X(0)\| < \delta \Rightarrow \|Y(t) - X(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

- Decimos que una solución $X(t)$ es asintóticamente estable si es estable y $\exists \delta > 0$ tal que $\forall Y(t)$ solución se cumple que $\|Y(0) - X(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} X(t) - Y(t) = \vec{0}$

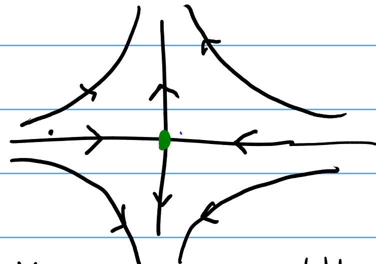
- Decimos que $\underbrace{X(t)}_{\downarrow\, X_0}$ es inestable si no estable.



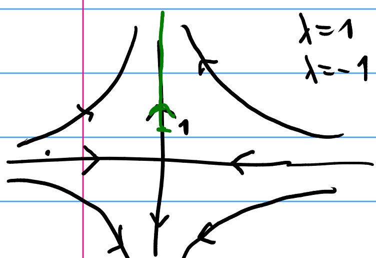
$X(t) = 0 \ \forall t$ es asintóticamente estable



$X(t) = 0 \ \forall t$ estable pero no asintóticamente.



$X(t) = 0 \ \forall t$ es inestable.



$X(t) = (0, e^t)$, $Y(t) = (0, (1-\delta)e^t)$ $\qquad \underbrace{X(t) - Y(t)}_{\nearrow (0, \delta e^t) \nearrow \infty}$

Cumple que $\|X(0) - Y(0)\| < \delta$ pero $\lim_{t \to +\infty} X(t) - Y(t) \neq 0$

$X(t) = 0 \ \forall t$ es inestable.

Prop: Sea $\dot{X} = AX$ entonces $X(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ es estable $\Leftrightarrow$ Cualquier otra solución lo es

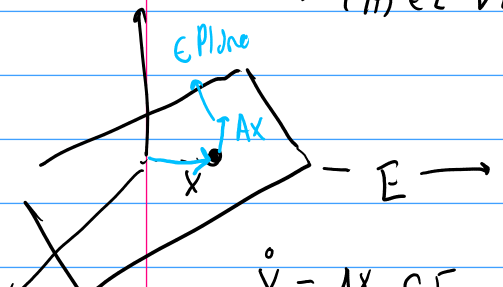
Teo: Sea $\dot{X} = AX$

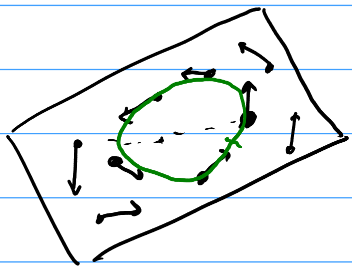
1) Si todos los valores propios tienen parte real negativa $\Rightarrow$ Todas las soluciones son asintóticamente estable.
2) Si $\exists \lambda$ vap tq $Re(\lambda) > 0 \rightarrow$ Toda solución es inestable
3) Si $Re(\lambda) \leq 0 \ \forall \lambda$ valor propio, también se sabe que ocurre. VER NOTAS.

13) b) Mostrar que si $\varphi(t)$ es solución de $\dot{x} = Ax$ con $\varphi(0) \in \underline{E_\lambda = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^m}$
$\Rightarrow \varphi(t) \in E_\lambda \ \forall t$.

$AE_\lambda \subset E_\lambda$.

b') Mostrar que si $E < \mathbb{R}^n$, A-invariante y $\varphi(t)$ solución con $\varphi(0) \in E$
$\Rightarrow \varphi(t) \in E \ \forall t$.





$\underbrace{\dot{x}} = \underbrace{Ax} \in E$

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que $n=3$, $\dim E = 2$

Sea $\beta = \{v_1, v_2, \underline{v_3}\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ tal que $\{\underbrace{v_1}, v_2\} \xrightarrow{b} E$.

$$\Rightarrow \ {}_\beta(A)_\beta = \begin{pmatrix} a & c & d_1 \\ b & d & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{Av_1}_{\in E} = a v_1 + b v_2 + 0 v_3$

$\Rightarrow X(t) = \tilde{x}(t) v_1 + \tilde{y}(t) v_2 + \tilde{z}(t) v_3$, como $X(0) \in E \Rightarrow \tilde{z}_0 = 0$

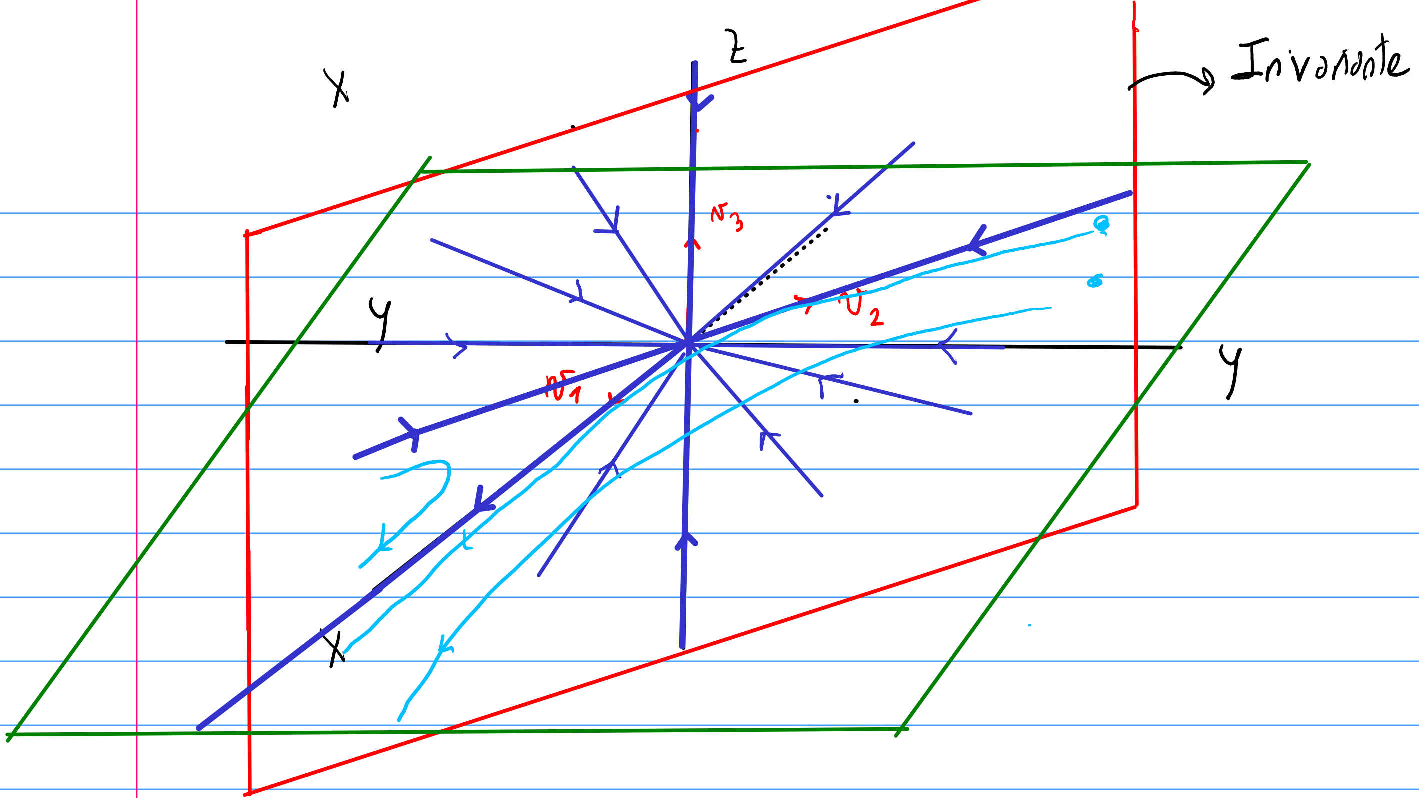
pero de la tercer fila de la matriz vemos que $\dot{\tilde{z}} = d_3 \tilde{z}$

$\Rightarrow \tilde{z}(t) = 0 \ \forall t. \Rightarrow X(t) = \tilde{x}(t) v_1 + \tilde{y}(t) v_2 \in E. \ \forall t$ //.

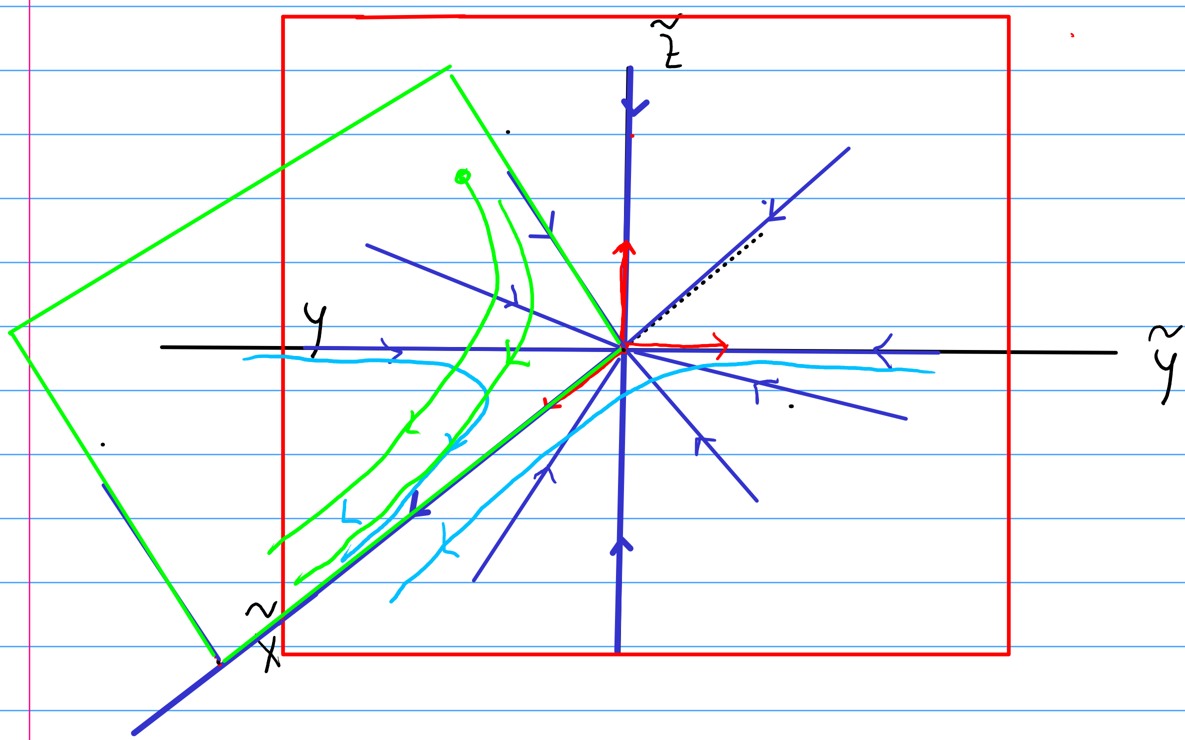
(c) Bosquejar el diagrama de fase $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$
(viii)

- Espacios invariantes típicos: Subespacios propios, Suma de espacios invariantes

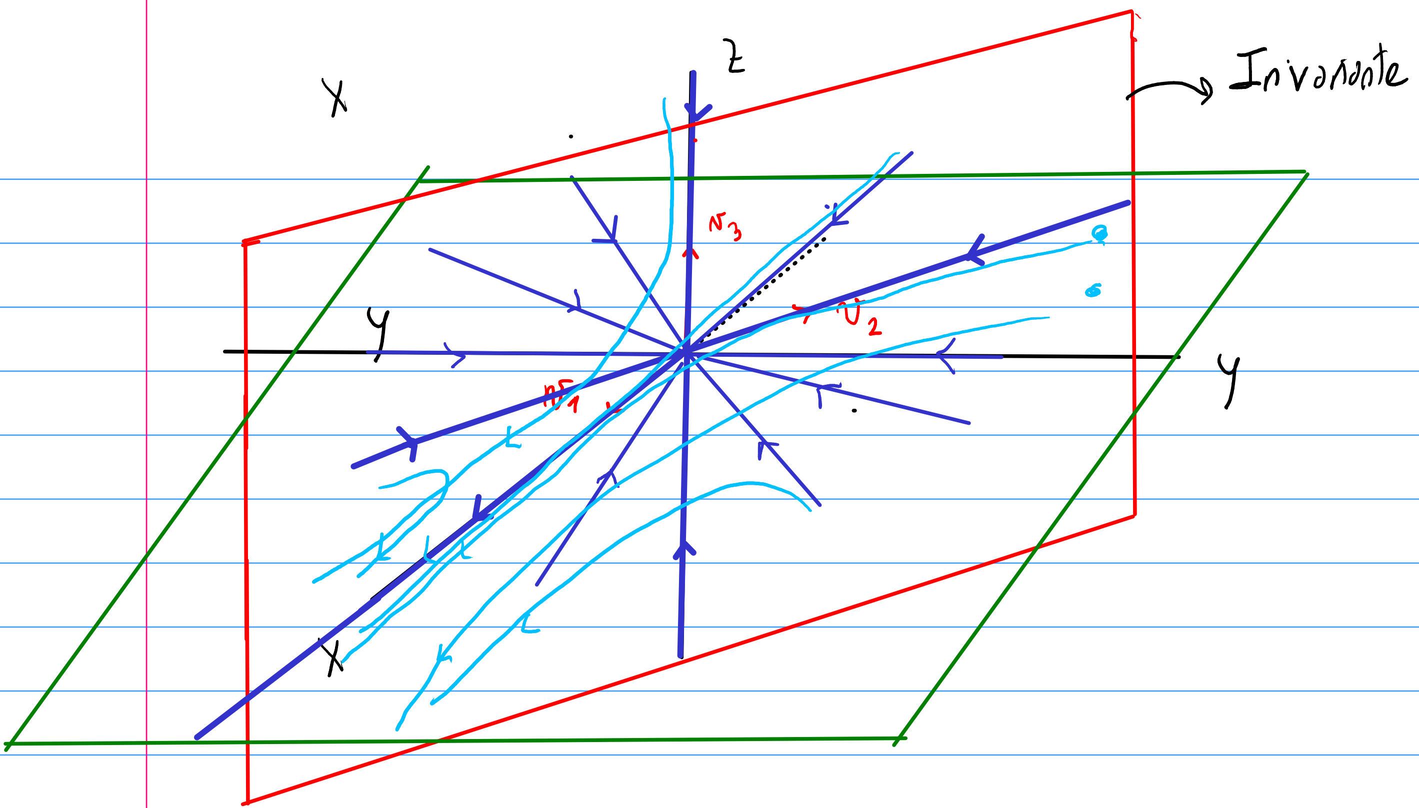
- $\lambda = 2$, $S_2 = [\underset{v_1}{(1,0,0)}]$
  $\lambda = -1$, $S_{-1} = [\underset{v_3}{(0,0,1)}, \underset{v_2}{(-1,1,0)}]$.

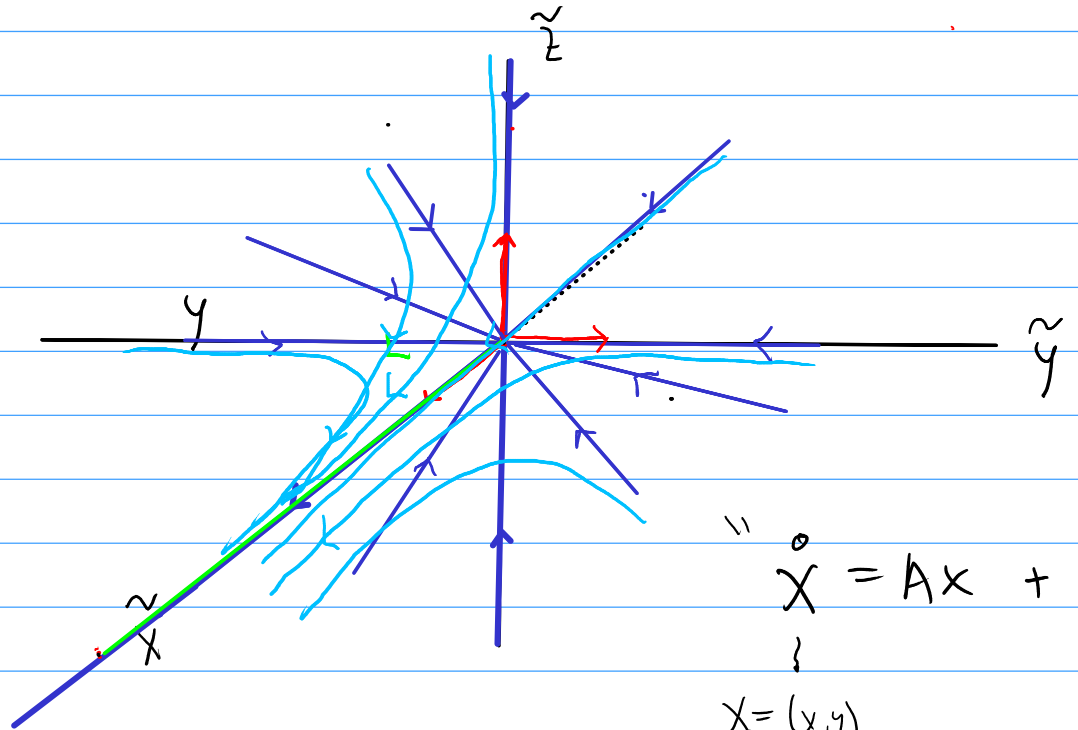


x
z
Invariante
v_3
y
v_2
v_1
y
x



$\tilde{z}$
y
$\tilde{y}$
$\tilde{x}$





"$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$"

$x = (x, y)$,

$\gamma \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{\gamma = 5}$.

$x_p(t) = -\frac{1}{4} \sin(2t)$.

$x_p(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) + \gamma$

$\ddot{x} = \sin(2t)$

$4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) = \sin(2t) \Rightarrow \alpha = -1/4, \ \beta = 0.$