5. Sea la ecuación

$$(*)\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 , & \forall\ (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u_x(0,t) = 0 ,\quad u_x(\pi,t) = 0 & \forall\, t>0 \\ u(x,0) = x & \forall x \in [0,\pi] \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi]\times[0,+\infty) \end{cases}$$

a) Buscando soluciones de la forma $X(x)\cdot T(t)$ hallar una solución de $(*)$ de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{u_n(x,t)}_{X_n(x)\cdot T_n(t)}$$

Si la solución es de la forma $X(x)T(t)$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = \frac{\partial}{\partial x^2}(X(x)T(t)) \iff X(x)\cdot T'(t) = X''(x)T(t)$$

$$\iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \quad \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \mu X(x) = 0 \\ T'(t) - \mu T(t) = 0 \end{cases}$$

<u>Caso $\mu>0$:</u> $\quad X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$

Ahora $\underline{\partial_x u(0,t)} = 0$

$$X'(0)\cdot T(t) = 0 \begin{cases} T(t) = 0\ \forall t \longrightarrow u(x,t) \equiv 0\ \forall (x,t) \quad \times \\ \boxed{X'(0) = 0} \end{cases}$$

$$\partial_x u(\pi,t) = 0 \Rightarrow X'(\pi) = 0. \text{ (Razonando análogamente).}$$

Pero $X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x} \xRightarrow[X'(0)=X'(\pi)=0]{} A = B = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ ×

Caso $\mu=0$ $\Rightarrow$ $X''(x)=0$ $\Rightarrow$ $X(x)=ax+b$ por $X'(0)=X'(\pi)=0$

$\Rightarrow X(x)=b \Rightarrow u(x,t)=C\cdot T(t)=K$

$T'(t)=\mu T(t)=0 \Rightarrow T(t)=C_2$

Caso $\mu<0$: $\mu=-\alpha^2 \Rightarrow X(x)=A\cos(\alpha x)+B\operatorname{sen}(\alpha x)$

$X'(x)=-\alpha A\sin(\alpha x)+\alpha B\cos(\alpha x)$, $X'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha B=0 \Leftrightarrow B=0$

$X'(\pi)=0 \Leftrightarrow -\alpha A\sin(\alpha\pi)=0$ $\nearrow$ $A=0 \rightsquigarrow u\equiv 0$ ✗

$\searrow$ $\operatorname{sen}(\alpha\pi)=0 \rightsquigarrow \alpha\pi=k\pi \Leftrightarrow \alpha=k\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Para cada $k\in\mathbb{N}-\{0\}$, me sirve $\mu=-k^2$

$\Rightarrow X_k(x)=A_k\cdot\cos(kx)$

$T_k'(t)=\mu T_k(t)=-k^2T_k(t) \Rightarrow T_k(t)=C_k\cdot e^{-k^2t}$

$\Rightarrow u_k(x,t)=\underbrace{A_k\cdot C_k}\cdot\cos(kx)\,e^{-k^2t}=a_k\cos(kx)\,e^{-k^2t}$

Renombro constantes.

En resumen, para cada $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tengo que

$u_k(x,t)=a_k\cos(kx)e^{-k^2t}$ satisface $\begin{cases}\partial_t u_k-\partial_x^2u_k=0\\ \partial_x u_k(0,t)=0=\partial_x u_k(\pi,t)\end{cases}$

Para satisfacer también el perfil voy a considerar

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos(kx)e^{-k^2t}+\frac{a_0}{2}$$

¿Cuánto tienen que valer las a_k?

$$x = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$$ $\Rightarrow$ Las a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $u_0(x) = x$, $0<x<\pi$, de tipo coseno.

$$\Rightarrow \underset{(k\geq 1)}{a_k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{k^2}, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow u(x,t) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{((-1)^k-1)}{k^2}\cdot\cos(kx)\,e^{-k^2 t} + \frac{\pi}{2}$$

- Es candidato a solución, debería verificarlo.

b) Verificar que la solución es efectiva.

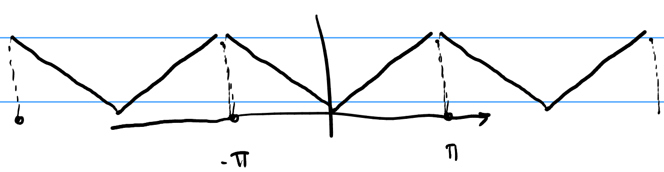
- $$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \underbrace{\frac{2}{\pi}}_{\leq 1} \frac{\overbrace{((-1)^k-1)}^{\leq 2}}{k^2} \underbrace{\cos(kx)}_{\leq 1} \underbrace{e^{-k^2 t}}_{\leq 1} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2} < \infty$$

$\Rightarrow$ La serie converge uniformemente en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

$\Rightarrow$ $u(x,t)$ está bien definida y es continua en $[0,\pi]\times[0,+\infty)$.

- $$u(x,0) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{((-1)^k-1)}{k^2}\cos(kx) \right) + \frac{\pi}{2} = x$$

Teorema de Dini



⊛ $\partial_t u(x,t) = \partial_t \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) e^{-k^2 t} + \frac{\pi}{2} \right)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t \left((a_k \cos(kx)) e^{-k^2 t} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k^2 a_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$$

Les mentí, veamos si de verdad es cierto.

$\partial_x^2 u(x,t) = \partial_x^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right)$

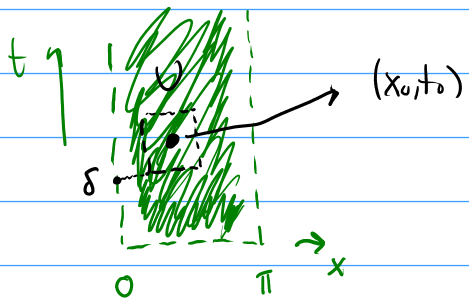
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_x^2 \left(a_k \cos(kx) e^{-k^2 t} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k^2 a_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$$

$$\Rightarrow \partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

(*) Veamos que $\partial_t u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t \left(a_k \cos(kx) e^{-k^2 t} \right)$, $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty)$

Dado $(x_0,t_0) \in [0,\pi] \times (0,+\infty)$

Sea U abierto como en la figura



$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$, $|a_k \cos(kx) e^{-k^2 t}| \le |a_k|$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < \infty$

$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{[(-1)^k - 1]}{k^2}$

$\Rightarrow S_n \underset{[0,\pi]\times[0,+\infty)}{\rightrightarrows} u(x,t) \Rightarrow \boxed{S_n \underset{U}{\rightrightarrows} u(x,t)}$ (1)

$\partial_t S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 a_k \cos(kx) e^{-k^2 t}$, $\left| -k^2 a_k \cos(kx) e^{-k^2 t} \right| \overset{\text{en } U}{\le} |k^2 a_k| e^{-k^2 \delta}$

y $\sum_{k=1}^{+\infty} |k^2 a_k| \cdot (\underbrace{e^{-\delta}}_{<1})^{k^2} < +\infty \Rightarrow \boxed{\partial_t S_n(x,t) \underset{U}{\rightrightarrows} h(x,t)}$ (2)

① + ② $\Rightarrow$ $u(x,t)$ es derivable respecto a t en U

y $\underbrace{\partial_t S_n(x,t)}$ $\underset{U}{\rightrightarrows}$ $\partial_t u(x,t)$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t\left(a_k \cos(kx)\, e^{-k^2 t}\right) \underset{U}{\rightrightarrows} \partial_t u(x,t)$$

en particular $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t\left(a_k \cos(kx)\, e^{-k^2 t}\right)\Big|_{(x_0,t_0)} = \partial_t u(x_0,t_0)$

Como (x_0,t_0) es arbitrario tengo que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \partial_t\left(a_k \cos(kx)\, e^{-k^2 t}\right) = \partial_t u(x,t).$$

* De igual manera se prueba para ∂_x y ∂_x^2.

En resumen, lo celeste era válido (*) $\Rightarrow$ $\partial_t u = \partial_x^2 u$.

* Condición de borde: $\displaystyle \partial_x\left(u(x,t)\right) = \partial_x\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)\, e^{-k^2 t} + \frac{\pi}{2}\right)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{+\infty} -k a_k \operatorname{sen}(kx)\, e^{-k^2 t}$, $\Rightarrow$ $\displaystyle \partial_x u(0,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k a_k \operatorname{sen}(0)\, e^{-k^2 t} = 0$

en $[0,\pi] \times (0,+\infty)$

$$\partial_x u(\pi,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k a_k \underbrace{\operatorname{sen}(k\pi)}_{0}\, e^{-k^2 t} = 0.$$

$u(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$ $\quad \forall\, t > 0$