12. Estudiar la ecuación $\dot{x} = t - x^2$

a) Estudiar máximos, mínimos y puntos de inflexión.

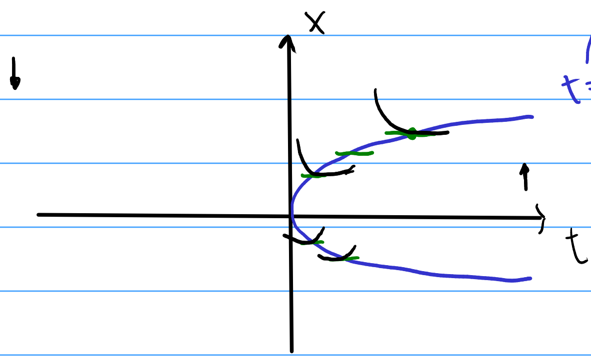
Puntos de equilibrio: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es de equilibrio sii $\varphi(t) = x_0 \ \forall t$ es solución sii $f(x_0, t) = 0 \ \forall t$.

No hay.

Signo: $\dot{x} = 0 \iff t = x^2$

$\{\dot{x} = 0\}$ / $t = x^2$

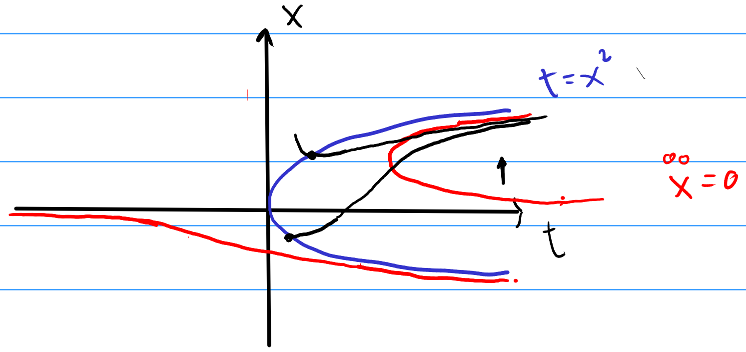
$\dot{x} = t - x^2$



Los soluciones que alcanzan en (t_0, x_0), $t_0 = x_0^2$, necesariamente vienen de afuera y entran, por las pendientes. Entonces el signo de la derivada de una solución de estas cambia $\Rightarrow$ mínimo.

$$\dot{x} = t - x^2 \Rightarrow \ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} = 1 - 2x(t - x^2) = 1 + 2x^3 - 2xt$$

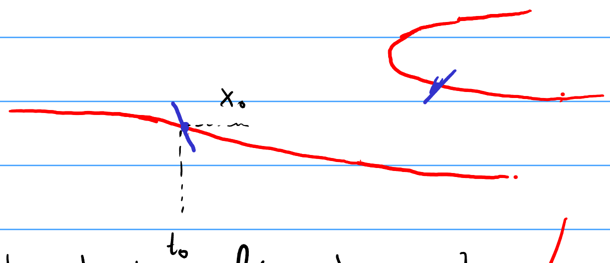
$$\ddot{x} = 0 \iff 1 + 2x^3 - 2xt = 0 \iff t = \frac{1 + 2x^3}{2x} = \frac{1}{2x} + x^2$$



- Una solución que entra adentro de $t = x^2$ no vuelve a salir (Vimos en la clase pasada) $\to$ Tiene que cambiar concavidad; Están definidas $\forall t$ a futuro.

- Todas las soluciones que arrancan en $(0,c)$ con $c \geq 0$ entran en la parábola azul.

- Se puede chequear que las pendientes de la eq diferencial en la curva roja son transversales a la curva roja.



$\overset{\circ\circ}{x} = 0$

$x(t)$

La pendiente azul vale $f(x_0, t_0) = t_0 - x_0^2$.

$$\boxed{t = \frac{1}{2x} + x^2} \to 1 = \left(\frac{-1}{2x^2} + 2x\right)\dot{x}$$

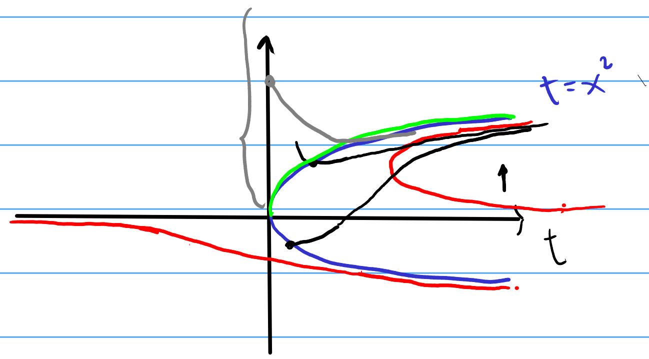
$$\dot{x} = \frac{1}{2x - \frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{t-x^2} - \frac{1}{2x^2}} > \frac{1}{\frac{1}{t-x^2}}$$

$$= t - x^2$$

$>$ Pendiente azul.

b) Demostrar que si φ es solución $\exists\, T \geq 0$ tal que

$\varphi(t) < \sqrt{t} \quad \forall t \geq T$



$\overset{\circ\circ}{x} = 0$

- Si $\varphi(0) \geq 0$ ya vimos que en algún momento $\varphi(t)$ entra en la parábola y no sale, en particular, a partir de ese momento, $\varphi(t) < \sqrt{t}$.

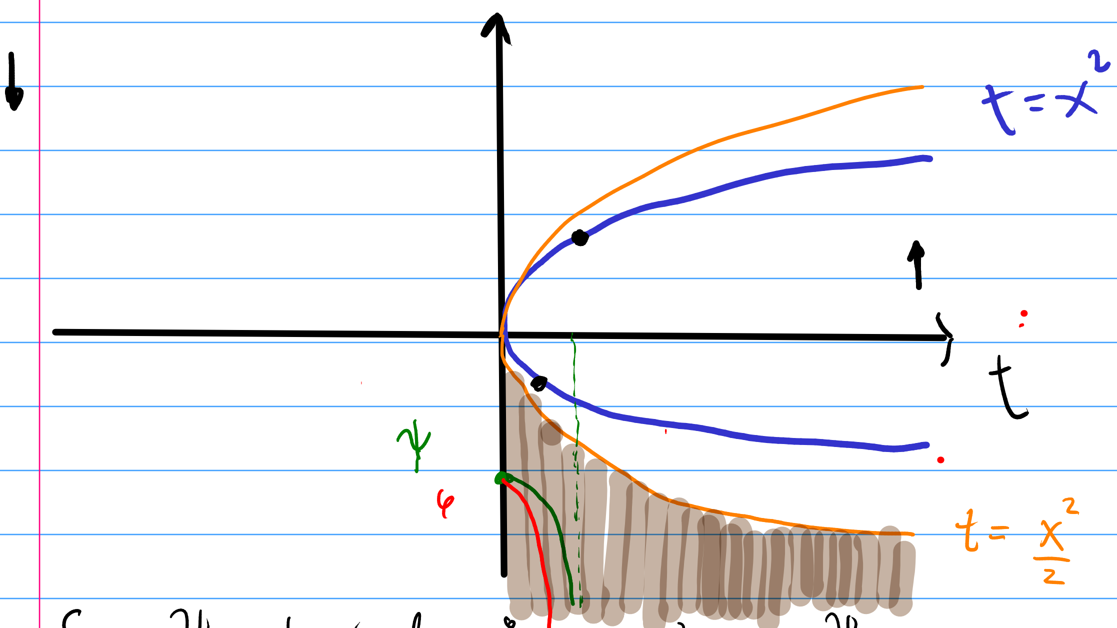
- Si $\varphi(0) < 0$, para que $\varphi(t) > \sqrt{t}$ en $t > 0$ necesariamente $\varphi(t)$ entra a la parábola $\Rightarrow$ no sale más $\Rightarrow \varphi(t) < \sqrt{t}$ a partir de ese momento $\lightning$

c) Para cada $c \in \mathbb{R}$, sea φ_c la solución maximal que comienza en $(0,c)$.

1) Si $c \geq 0 \Rightarrow \varphi_c$ está definida $\forall t > 0$:

Si $c \geq 0$ ya vimos que φ_c entra en la parábola $\Rightarrow$ por (*) está definida $\forall t > 0$.

2) Existe $K < 0$ tal que $\forall c < K$, φ_c tiende a $-\infty$ en tiempo finito



Sea ψ solución de $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$ y $\psi(0) = K < 0$, con K suficientemente chico para que Graf ψ no corte a $t = x^2/2$.

En el dominio marrón $\left(\{(t,x) : \frac{x^2}{2} > t,\ x < 0\}\right)$ se cumple que

$\underbrace{t - x^2} < \frac{x^2}{2} - x^2 = \underbrace{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$ Tengo el lema de comparación.

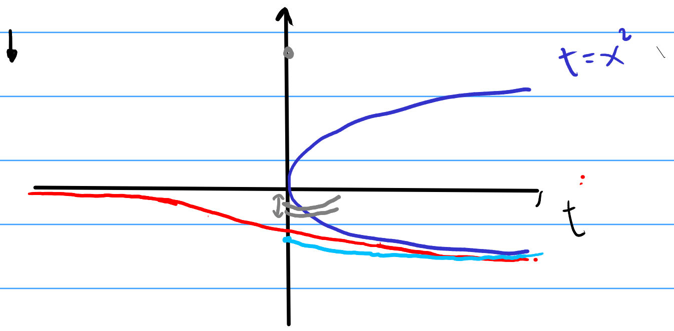
La función de la ecuación $\dot{x} = \underbrace{t - x^2}$

La función de mi ecuación auxiliar $\left(\dot{x} = \underbrace{-\frac{x^2}{2}}\right)$

En conclusión si φ es solución $\begin{cases} \dot{x} = t - x^2 \\ \varphi(0) = K \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) < \psi(t)$ $\forall t > 0$, $t \in \mathrm{Dom}\,\varphi \cap \mathrm{Dom}\,\psi$ y tal que $\varphi(t) \in$ Marrón (se cumple)

$\Rightarrow$ $\varphi(t)$ tiende a $-\infty$ antes o en el mismo momento que ψ.

3) Existe un único c_0 tal que φ_{c_0} está definida $\forall t > 0$ y $\lim_{t \to +\infty} \varphi_{c_0}(t) - (-\sqrt{t}) = 0$



<u>Existencia:</u> $A = \{ c \in \mathbb{R} \mid \varphi_c \text{ entra en la parábola} \}$ es abierto por continuidad de las condiciones iniciales

Análogamente $B = \{ c \in \mathbb{R} \mid I(0,c) = (a,b),\ b \in \mathbb{R} \}$ es abierto por continuidad de las cond. iniciales.

No es directo.

- A y B son disjuntos, abiertos y no son vacíos $\Rightarrow$ $A \cup B \neq \mathbb{R}$ Conexión

$\mathbb{R} = \underset{B}{(\longrightarrow} \quad \underset{A}{(\longrightarrow}$ NO!

La conclusión es que $\exists\, c_0 \notin A$ y $c_0 \notin B$ $\Rightarrow$ φ_{c_0} no entra en la parábola y está definida $\forall t$ a futuro. //.