Ecuaciones lineales de 2do orden con coeficientes constantes

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(x)$$

Se le llama ecuación homogenea si $f = 0$.

Prop: Si V es el conjunto de soluciones de la ecuación homogenea
$\Rightarrow$ V es un espacio vectorial de dimensión 2.

Necesitamos hallar dos soluciones φ_1, φ_2 Li $\Rightarrow \forall \varphi \in V$, $\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$

El método para hallar φ_1, φ_2 es mirar el polinomio característico:

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

- λ_1, λ_2 raíces reales distintas $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 x}$ $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 x}$
- λ_0 raíz real doble $\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{\lambda_0 x}$, $\varphi_2(t) = t\, e^{\lambda_0 x}$
- $\lambda = p \pm iq$ raíces complejas $\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{px} \cdot \cos qx$, $\varphi_2(t) = e^{px} \cdot \sin qx$.

Ejemplo 15 c) $y'' + 2y' + 2y = (\cos(2x) + \sin(2x))/2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

La solución general $\varphi = \varphi_p + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ donde φ_1, φ_2 son Li y solución de la ecuación homogenea. Además φ_p es una solución de la ecuación, se le llama solución particular.

Homogenea: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \rightarrow \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

$\varphi_1(t) = e^{-x}\cos(x)$, $\varphi_2(t) = e^{-x}\sin(x)$

Solución particular: $y'' + 2y' + 2y = (\cos(2x) + \sin(2x))/2$

Pruebo con $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = (-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)) + 2(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x))$$
$$+ 2(A\cos(2x) + B\sin(2x))$$

$$= \cos(2x)(-4A+4B+2A) + \sin(2x)(-4B-4A+2B) = \cos(2x)\cdot\frac{1}{2} + \sin(2x)\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 4B-2A = 1/2 \\ -4A-2B = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -3/20 \\ B = 1/20 \end{matrix}$$

$$y(x) = \underbrace{C_1 e^{-x}\cos(x) + C_2 e^{-x}\sin x}_{\text{Respuesta natural}} \quad \underbrace{-\frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{20}\sin(2x)}_{\text{Respuesta forzada}}$$

$-1 \pm i$

Debo hallar C_1 y C_2, para eso uso $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

En este ejemplo encontramos y_p a ojo. En general si $f(x)$ es simple puedo ($\ddot{y} + a\dot{y} + by = f(x)$)

Para $f(x)$ de la forma $f(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\sin(qx))$ donde $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios de grado $\leq n$, hay un procedimiento

- Si $p \pm iq$ no es raíz de $p(\lambda)$ $\Rightarrow$ $y_p(x) = e^{px}(\tilde{A}(x)\cos(qx) + \tilde{B}(x)\sin qx)$ con $gr\,\tilde{A} = gr\,\tilde{B} = n$.
- Si $p \pm iq$ raíz simple de $p(\lambda)$ $\Rightarrow$ $y_p(x) = x\,e^{px}(\tilde{A}(x)\cos(qx) + \tilde{B}(x)\sin qx)$ con $gr\,\tilde{A} = gr\,\tilde{B} = n$.
- Si $q=0$ y p raíz doble de $p(\lambda)$ $\Rightarrow$ $y_p(x) = x^2 e^{px}\underbrace{\tilde{A}(x)}_{gr=n}$.

11) c) $$y'' + y' = \underline{10x^4} = e^{0x}\cdot(10x^4\cos(0x))$$

$$p = 0 = q$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda+1) \qquad \lambda = -1$$

$$p \pm iq = 0$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x\cdot\tilde{A}(x) \qquad gr\,\tilde{A} \leq 4$$

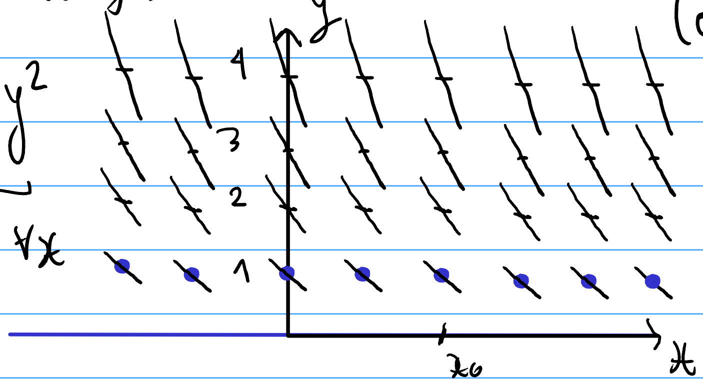
$\boxed{y'(x)} = -y^2(x) < 0$

3 Diagrama de fase

b) $\underbrace{y' = -y^2}$

$y(x) = 0 \ \forall x$

Solución fácil



$(0,1)$ $y'(0) = -y^2(0) = -1$

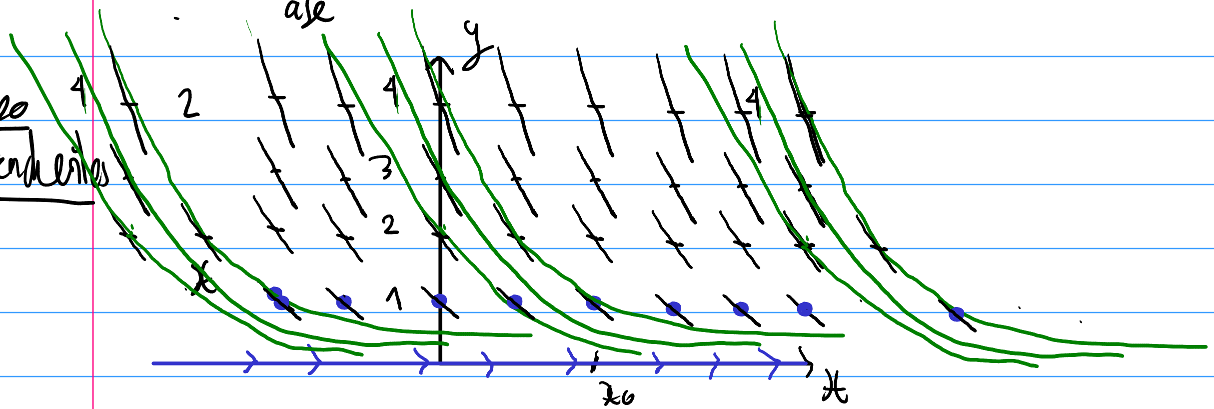
$(x_0,1)$ $y'(x_0) = -y^2(x_0) = -1$

[No depende de x_0

Esto se debe a que no aparece la variable x en la ecuación: $y' = y^2$. Formalmente $\boxed{y' = f(y)}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Campo de pendientes



- Si $y(x)$ es solución $\Rightarrow$ $y(x-x_0)$ también es solución.

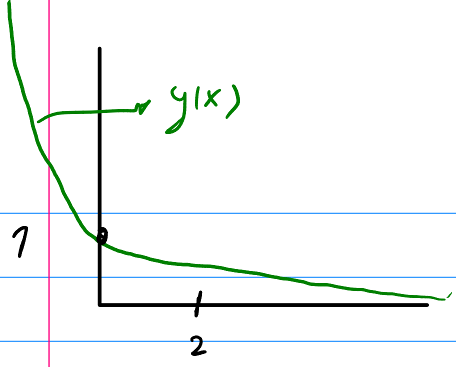
Ya que por ser autónoma $(\underbrace{y(x-x_0)})' = y'(x-x_0) = f(\underbrace{y(x-x_0)})$

Entonces si y es solución al problema con condición inicial:

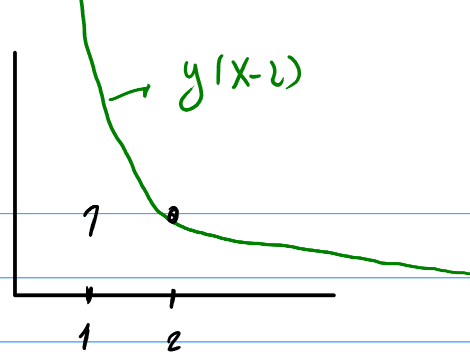
$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow y(x-x_0) \text{ es solución de } \begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0, y_0)$

$y' = -y^2$
$y(0) = 1$



$\Rightarrow$ La solución de $y' = -y^2$ con $y(2) = 1$ es $y(x-2)$.



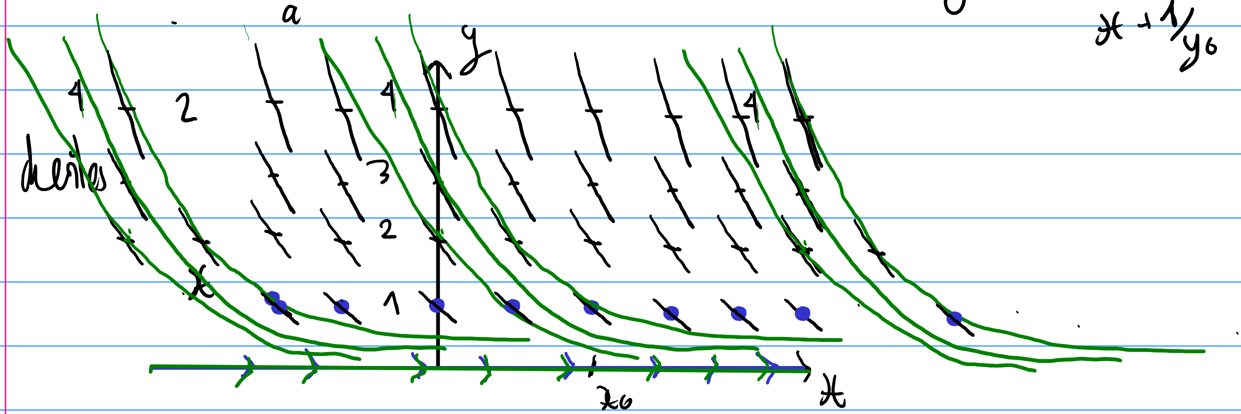
Al final estudio condiciones iniciales de la forma $(0, y_0)$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

$(y \neq 0)$

- $y' = -y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + c$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x - c}$ | $y(0) = y_0 \Rightarrow \frac{1}{0 - c} = y_0$

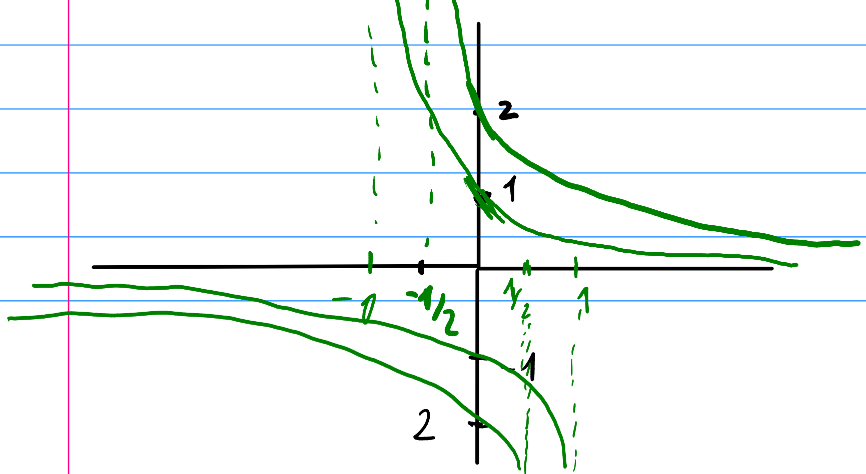
$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x + 1/y_0}$



La solución que en $x=0$ pasa por $y_0 \in \mathbb{R}$ es $y(x) = \frac{1}{x + 1/y_0}$

Si $y_0 > 0$: $y : \left(-\frac{1}{y_0}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{x + 1/y_0}$

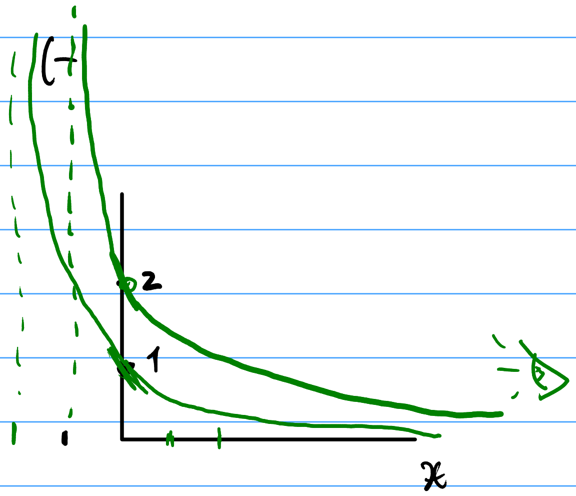
[$\left(-\infty, -\frac{1}{y_0}\right)$ este no tiene a $x=0$]

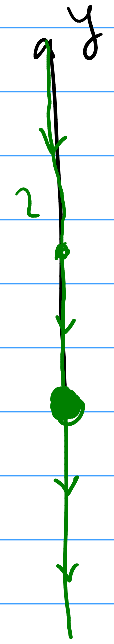


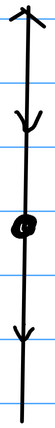
Si $y_0<0$, $y:(-\infty,-1/y_0)\to\mathbb{R}$, $y(x)=\dfrac{1}{x+1/y_0}$

[$(-1/y_0,+\infty)$ no tiene a $x=0$]

Diagrama de fase: Es un diagrama de las trayectorias (No es dibujo del gráfico)







$\boxed{\text{Es el } sgn(y')}$

$y''=e^{2x}\cdot(3\cos(x)-4\sin(x))$ $\quad y'=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$y=e^{2x}\cos x$

$\cancel{e^{2x}}(3\cos(x)-4\sin(x))+a(\cancel{e^{2x}}(2\cos x-\sin x))+b(\cancel{e^{2x}}\cos 2x)=0$

$\cos(x)(3+2a+b)+\sin(x)\cdot(-4-a)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ -4-a=0 \end{cases}$$

$e^{2x}\cos(\underbrace{1x}_{})$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{2+i}_{}$ raît de $P(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$

$(2+i)^2 = \underbrace{i^2+4}_{3} + 4i$

$3+4i + a(2+i)+b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+2a+b=0 \\ 4+a=0 \end{cases}$$