10. Supongamos que $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ función de clase C^1 y $\exists\ v: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ continua y tal que

$$\|f(t,x)\| \leq v(t) \cdot \|x\| \quad \forall\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Demostrar que las soluciones maximales están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $f(t,x) = A(t) \cdot x$, con $t \mapsto A(t)$ continua.

Lema de Gronwall: Sea $u, v: [a,b] \to [0,+\infty)$ continuas y tal que $\exists\ \alpha > 0$ y se cumple

$$\rightsquigarrow u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]$$

Entonces

$$u(t) \leq \alpha \cdot e^{\int_a^t v(s)\,ds}$$

$\dot{x} = f(t,x)$

Sea $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ solución maximal, supongamos por absurdo que $b < \infty$.

Como es solución se cumple $\overbrace{\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))}^{\int_{t_0}}$ $\forall t \in (a,b)$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s)\,ds = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{f(s,\varphi(s))}_{\text{vector}}\,ds \qquad t_0 \leq t < b$$

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds \right\|.$$

$$\leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(s,\varphi(s))\|\,ds \leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t v(s)\,\|\varphi(s)\|\,ds$$

$(\|f(t,x)\| \leq v(t)\,\|x\|)$. $\qquad t_0 \leq t < b$

$$\underbrace{\|\varphi(t)\|}_{u(t)} \leq \underbrace{\|\varphi(t_0)\|}_{\alpha} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{v(s)}_{V(s)} \underbrace{\|\varphi(s)\|}_{u(s)}\, ds \quad , \quad t_0 \leq t < b$$

Por Gronwall en $[t_0, t]$ con $t<b$ vale

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \quad , \quad t_0 \leq t < b \qquad (*)$$

Como $v : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ es continua $\Rightarrow$ tiene máximo en $[t_0, b]$, llamémosle M.

$$\Rightarrow \|\varphi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \leq \|\varphi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^{t} M ds} \leq \|\varphi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^{b} M ds} = \|\varphi(t_0)\| e^{M(b-t_0)}$$

$\forall t \in [t_0, b]$

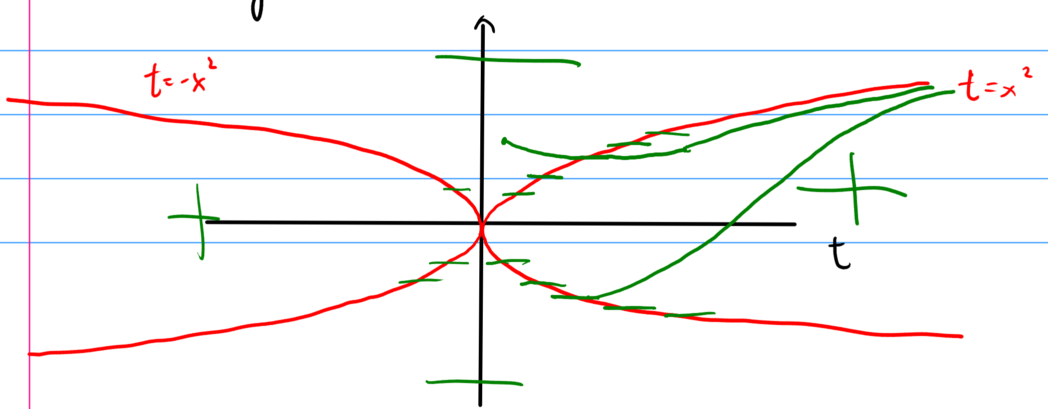
$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds} \leq \|\varphi(t_0)\| e^{M(b-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, b)$$

Entonces $\varphi(t)$ no se escapa de K a futuro, donde

$$K := \left\{ (t,x) : t \in [t_0, b],\ \|x\| \leq \|\varphi(t_0)\| \cdot e^{M(b-t_0)} \right\} \quad \lightning \Rightarrow b = +\infty .$$

11. Se considera $\dot{x} = t^2 - x^4$

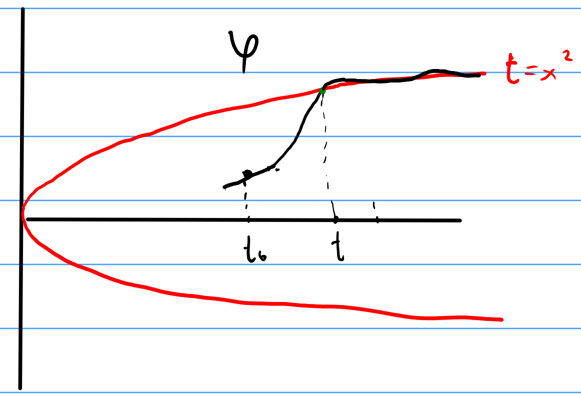
a) Estudiar el signo de $\dot{x}$: $\quad \dot{x} = 0 \Leftrightarrow t^2 - x^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x^4 \Leftrightarrow |t| = x^2$.



b) Sea $R = \{(t,x) : t > x^2\}$ y $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$

una solución tal que $\exists\, t_0 \in (a,b)$, $\varphi(t_0) \in R$

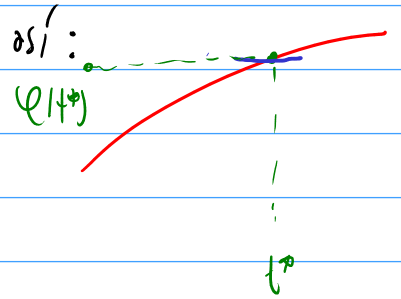
1) Probar que $\varphi(t) \in R \;\; \forall t \geq t_0, t \in (a,b)$



Por absurdo, si se sale de R, es decir, $\exists\, t_1 > t_0$, $t_1 \in (a,b)$ con $\varphi(t_1) \notin R$.
Por continuidad $\exists\, t : \sqrt{t} = \varphi(t)$
De hecho $\exists\, t^*$ tal que $\varphi(s) \in R \;\; \forall s \in [t_0, t^*]$ y $\varphi(t^*) = \sqrt{t^*}$.

[Es decir existe un primer momento después de t_0 donde toca lo rojo y antes no.

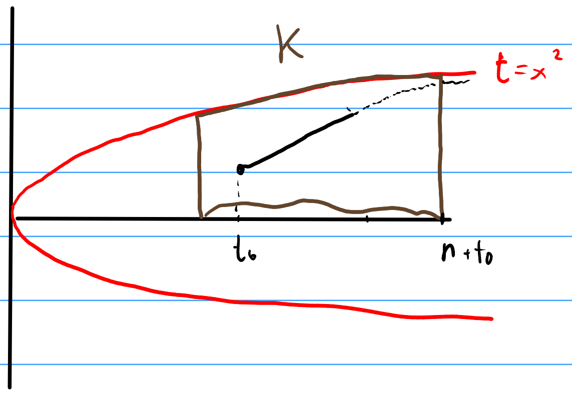
Pero una solución a $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t^*) = \varphi(t^*) \end{cases}$ necesariamente cumple que para tiempos menores a t^* está fuera de R. ya que tenemos que las pendientes son transversales así:



Esto me da un absurdo pues φ cumple $\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t^*) = \varphi(t^*) \end{cases}$

pero para $t_0 \leq t < t^*$, $\varphi(t) \in R$.

2) Probar que el intervalo maximal no está acotado superiormente.



Usando el compacto K, sabemos que a futuro solo puede escaparse por la tapa de la derecha $\Rightarrow \exists t \in I, t > t_0 + n$ $\forall n$.

//