(No son derivadas parciales).

Una ecuación diferencial ordinario es una ecuación funcional (la incógnita es una función) que involucra derivadas.

Por ejemplo: $\ddot{x} + \dot{x} = t$ ← La variable ; $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = F$ $\qquad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = t$

1. Variables Separables

a) $y' = y^2 - 1$ $\qquad$ Busco $y : I \to \mathbb{R}$ que cumpla la ecuación.

Vamos a suponer que $y^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\frac{y'}{y^2-1}}_{\text{Todo lo que tiene } y} = \underbrace{1}_{\text{Todo lo que tiene } t} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\overbrace{y'}^{y'(t)dt}}{y^2-1}\, dt = t - t_0$$

$u = y(t)$

$du = y'(t)dt$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{u^2-1}}_{} = t - t_0$$

$$(y_0 = y(t_0)) \quad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^2-1} = t - t_0 \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)} \right) dy = t - t_0$$

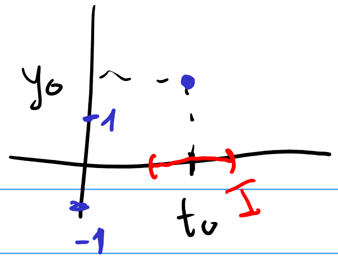
$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + B(y-1)}{(y+1)(y-1)} \Rightarrow \begin{array}{l} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\ln|y-1| - \ln|y+1|}_{\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|}\Big)\Big|_{y_0}^{y} = t - t_0 \Rightarrow \ln\left| \frac{(y-1)}{(y+1)} \frac{(y_0+1)}{(y_0-1)} \right| = 2(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left| \frac{y-1}{y+1} \frac{y_0+1}{y_0-1} \right|}_{} = \underbrace{e^{2(t-t_0)}}_{}$$

Supusimos que $y^2 \neq 1$. Voy a buscar una solución que en tiempo $t = t_0$ vale $y(t) = \underbrace{y_0}_{}$ con $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ condición inicial.

Para todo este razonamiento supusimos que $y_0^2 \neq 1$



Entonces hay al menos hay un intervalo I donde $y(t)^2 \neq 1$.

Seguimos: depende de t

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\,\frac{y_0+1}{y_0-1}\right| = e^{2(t-t_0)} \Rightarrow \frac{y-1}{y+1}\,\frac{y_0+1}{y_0-1} = e^{2(t-t_0)}$$

en $t=t_0$, eso vale $1>0$, pero además para que cambie de signo y, debe ocurrir que en algún momento $y=1$ o $y=-1$.

$y(t_0)=y_0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y-1}{y+1}} = \frac{y_0-1}{y_0+1}e^{2(t-t_0)} \Rightarrow 1-\frac{2}{y+1} = \frac{y_0-1}{y_0+1}e^{2(t-t_0)} \Rightarrow 1-\left(\frac{y_0-1}{y_0+1}\right)e^{2(t-t_0)} = \frac{2}{y+1}$$

$$\frac{y+1-2}{y+1} = 1-\frac{2}{y+1}$$

$$\Rightarrow y+1 = \frac{2}{1-\left(\frac{y_0-1}{y_0+1}\right)e^{2(t-t_0)}} \Rightarrow y(t) = \frac{2}{1-\left(\frac{y_0-1}{y_0+1}\right)e^{2(t-t_0)}}-1$$

$$\frac{\overset{0}{y(t)-1}}{y(t)+1}\,\frac{y_0+1}{y_0-1} = \underbrace{e^{2(t-t_0)}}_{>0}$$

Supongamos que $y^2(t) \neq 1$

$y(t)=1$ o $y(t)=-1$

Observación: $y^2(t)\neq 1 \ \forall t$. En resumen si $y(t_0)=y_0$ con $y_0^2\neq 1$ y además $y'(t)=y^2(t)-1 \Rightarrow y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{1-\left(\frac{y_0-1}{y_0+1}\right)e^{2(t-t_0)}}}-1$$

¿Qué sucede si $y_0=1$ o $y_0=-1$? $y'=y^2-1$

Si $y_0=1 \Rightarrow$ $\boxed{y(t)=1\ \forall t \text{ satisface}}$ | Si $y_0=1 \Rightarrow$ $\boxed{y(t)=-1\ \forall t}$

4. Lineales de Primer orden: $y' + a(t)y = b(t)$

d) $y' - \frac{2}{x} y = x^4$ (La variable es x, $y(x)$?).

$\underline{\underline{x \neq 0}}$: es en $\mathbb{R} - \{0\}$.

* (Ej 7): Toda solución ϕ se escribe como $\phi = \phi_1 + C(\phi_2 - \phi_1)$
donde ϕ_2 y ϕ_1 son dos soluciones.

¡Es una recta!

Gracias a esto se puede obtener la siguiente fórmula:

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int e^{\int a(t)dt} b(t)dt + \underbrace{K}\right)$$

constante que depende de las condiciones iniciales

EQUIVALENTE

Otra forma: 1) Busco una solución general y_H de (Homogenea)

$$y' - \frac{2}{x} y = 0$$

: $y' = \frac{2}{x} y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow \ln y = 2\ln x + c$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln x^2 + \underbrace{c} \Rightarrow |y| = \underbrace{e^c} \cdot x^2 \Rightarrow \boxed{y_H(x) = K x^2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad K$

VERIFICO: $\overbrace{(k\,2x)}^{y'_H} - \frac{2}{x} \cdot \overbrace{kx^2}^{y_H} = 2kx - 2kx = 0$ ✓

2) Busco una solución $\underline{\text{particular}}$ de $y' - \frac{2}{x} y = x^4$, ¿y_p?

(Una sola)

Entonces la solución completa del problema es $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

Hay un método para buscar: Busco solución de la forma $y_p(x) = K(x)x^2$

Sustituyo en la eq: $\left(k'(x)x^2 + \underbrace{k(x)2x) - \frac{2}{x} \cdot k(x)x^2}_{\text{Se cancela}}\right. = x^4$

$\Leftrightarrow k'(x)\, x^2 = x^4 \Rightarrow k'(x) = x^2 \Rightarrow$ Puedo elegir $k(x) = \frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = k(x)\, x^2 = \frac{x^3}{3} \cdot x^2 = \frac{x^5}{3}}$ es solución de $y' - \frac{2y}{x} = x^4$

$\Rightarrow$ Toda solución es de la forma: $y(x) = Kx^2 + \frac{x^5}{3}$.

---

8) $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$

e) $-2y' - y = x y^3$, $z = \frac{1}{y^2}$ $(y \neq 0)$

Así evoluciona y. ¿Cómo evoluciona z?

$$z'(x) = \left(\frac{1}{y^2(x)}\right)' = \frac{-2}{y^3(x)} \cdot y'(x) = \frac{xy^3 + y}{y^3} = x + \frac{1}{y^2} = x + z(x)$$

$$y'(x) = \frac{xy^3 + y}{-2}$$

entonces $z' = x + z \Rightarrow \boxed{z' - z = x}$

Resolver: $z(x) = (x-1) + Ae^{-x} \Rightarrow z(1) = 1$ implica $A = e$

$y(1) = -1 \Rightarrow z(1) = \frac{1}{(y(1))^2} = 1$

$\Rightarrow z(x) = (x-1) + e^{1-x}$

$\Rightarrow y^2(x) = \frac{1}{(x-1) + e^{1-x}}$

$$\boxed{\Rightarrow y(x) = -\sqrt{\frac{1}{(x-1) + e^{1-x}}}}$$

//

$-2y' - y = x y^3$

$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{2(\sqrt{z})^3} z'(x)$

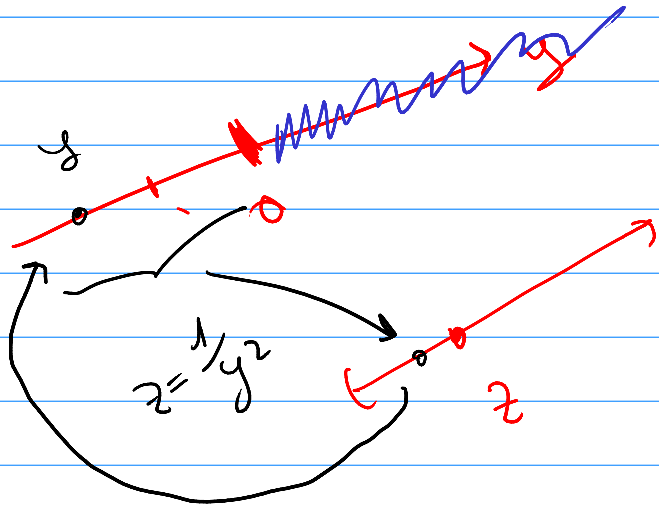
$y^3 = -\frac{1}{z^{3/2}}$

$-2\frac{z'}{2z^{3/2}} + \frac{1}{z^{1/2}} = -\frac{x}{z^{3/2}} \underset{\times z^{3/2}}{\Rightarrow} -z' + z^{3/2-1/2} = -x$

$\Rightarrow -z' + z = -x.$

$z' = x + z$

$z = \frac{1}{y^2}$ $\qquad$ $y < 0$



$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$