1. $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = x\sin t$, $(x,t) \in D = (0,\pi) \times \mathbb{R}$

a) Hallar una solución particular $u_0(x,t) = f(x)\sin t + g(x)$
donde f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = g'(0) = -1$.

$\dfrac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} = -f(x)\sin t$, $\dfrac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = f''(x)\sin t + g''(x)$

$-f(x)\sin t - (f''(x)\sin t + g''(x)) = x\sin t$

$-(f(x) + f''(x))\sin t - g''(x) = x\sin t \Rightarrow g''(x) = 0 \Rightarrow \underline{f(x) + f''(x) = -x}$

$\Rightarrow g(x) = ax + b \xrightarrow{g(0)=0,\ g'(0)=-1} = -x$

$\underline{f(x) + f''(x) = -x}$: $f_H(x) + f_H''(x) = 0 \rightarrow f_H(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)$

Y ahora una solución particular $f_p(x) = -x$.

$\Rightarrow f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - x$.

Ahora $f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$. Y $f'(x) = +B\cos x - 1$ y $f'(0) = -1$

$\Rightarrow B = 0$. $\Rightarrow f(x) = -x$.

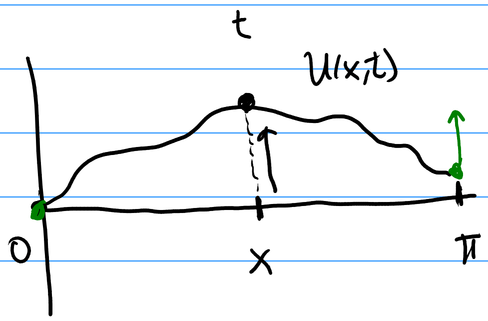
$\Rightarrow u_0(x,t) = -x\sin t - x$ es solución de $\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = x\sin t \\ (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}. \end{cases}$

b) Hallar la función u que satisfaga:

- $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = x\sin t$, $(x,t) \in D\times\mathbb{R}$.
- u es C^2 en $D\times\mathbb{R}$ y continua en $[0,\pi]\times\mathbb{R}$.
- $u(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$, $x \in [0,\pi]$
- $u_t(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in [0,\pi]$.
- $u(0,t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$
- $u(\pi,t) = -\pi\sin t - \pi$

Convergen uniformemente por el mayorante de Weierstrass, Por ejemplo,

$$\left|\frac{\sin x}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$



Quiero encontrar la función u que satisfaga eso.

Sea $v(x,t)$ tal que $u(x,t) = v(x,t) + u_0(x,t)$ $\quad v := u - u_0$

Entonces voy a encontrar v. ¿Qué cumple?

- $u_{tt} - u_{xx} = x\sin t \Rightarrow v_{tt} - v_{xx} + \underbrace{u_{0_{tt}} - u_{0_{xx}}}_{x\sin t} = x\sin t$

$$\Rightarrow \boxed{v_{tt} - v_{xx} = 0 \ , \ (x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}}$$

- $u(x,0) = v(x,0) + \underbrace{u_0(x,0)}_{-x} = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$

$$\Rightarrow \boxed{v(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}}$$

$u_0(x,t) = -x\sin t - x \Rightarrow u_{0_t}(x,0) = -x\cos t\Big|_{t=0} = -x$

- $u_t(x,0) = v_t(x,0) + \underbrace{u_{0_t}(x,0)}_{-x} = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

$$\Rightarrow \boxed{v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}}.$$

- $u(0,t) = v(0,t) + \underbrace{u_0(0,t)}_{0} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{v(0,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}}.$$

- $u(\pi,t) = v(\pi,t) + \underbrace{u_0(\pi,t)}_{-\pi\sin t - \pi} = -\pi\sin t - \pi$

$$\Rightarrow \boxed{v(\pi,t) = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}}.$$

Entonces v satisface una ecuación de onda sin fuente y con extremos fijos en 0. Vamos a resolver.

Busco una solución con el método de variables separables

$$v(x,t) = \underbrace{X(x) \cdot T(t)}_{} = 0$$

Como $v_{tt} = v_{xx} \Rightarrow X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = X(x)\cdot\mu \\ T''(t) = T(t)\cdot\mu \end{cases}$$

- Caso $\mu > 0$: $X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$:

$$v(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ \text{o} \\ \cancel{T(t) = 0 \ \forall t} \ (\text{Sino } v \equiv 0). \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad X(0) = 0.$

Con el mismo razonamiento en $x = \pi$ se ve que $X(\pi) = 0$.

Entonces $\begin{cases} X(x) = A e^{\sqrt{\mu} x} + B e^{-\sqrt{\mu} x} \\ X(0) = 0 = X(\pi) \end{cases} \underset{\text{Sistema de ecuaciones.}}{\Rightarrow} A = B = 0.$

Absurdo pues $v \equiv 0$. ↯

<u>Caso $\mu = 0$:</u> $\quad X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$

Pero $\begin{cases} X(x) = Ax + B \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0 \Rightarrow v \equiv 0$ ↯

<u>Caso $\mu < 0$:</u> $\quad \mu = -\alpha^2$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow X'' + \alpha^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = \boxed{A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)}$

Sabemos que $X(0) = 0$, $X(0) = A \Rightarrow A = 0$.

$X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = B \sin(\alpha \pi) = 0$ $\begin{cases} \cancel{B = 0} \rightsquigarrow X \equiv 0 \Rightarrow V \equiv 0 ↯ \\ \alpha \pi = k\pi, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = k. \Rightarrow X(x) = B \sin(kx)$

<u>$T''(t) = -k^2 T(t)$</u> $\Rightarrow T''(t) + k^2 T(t) = 0$

$\Rightarrow T(t) = A \cos(kt) + B \operatorname{sen}(kt) \quad \Big| \quad X(x) \cdot T(t)$

$\Rightarrow$ Para cada k tengo una solución que satisface las condiciones de borde: $\quad v_k(x,t) = \underbrace{B_k \sin(kx)}_{X_k} \cdot \underbrace{(A_k \cos(kt) + C_k \sin(kt))}_{T_k}.$

$$V_K(x,t) = \sin(Kx)\cdot(A'_K\cos(Kt) + B'_K\sin(Kt)), \quad K\in\mathbb{N}.$$

Falta cumplir que $V(x,0) = \tilde{f}(x)$, $V_t(x,0) = \tilde{g}(x)$.

Observar que combinación lineal de soluciones es solución

Me atrevo a pensar que esto vale con "combinaciones lineales ∞".

Es decir, que $V(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty} \sin(Kx)\,(A'_K\cos(Kt) + B'_K\sin(Kt))$ es solución

NO LO SÉ.

Quiero satisfacer las condiciones iniciales:

$$\tilde{f}(x) = V(x,0) = \sum_{K=1}^{+\infty} A'_K \sin(Kx).$$ ¿cuánto vale A'_K?

Son los coeficientes de Fourier tipo seno

En nuestro caso $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \Rightarrow A'_K = \frac{1}{K^4}$.

$$\tilde{g}(x) = V_t(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{K=1}^{+\infty}\sin(Kx)\,(A'_K\cos(Kt) + B'_K\sin(Kt))\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{K=1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sin(Kx)\cdot(A'_K\cos(Kt) + B'_K(\sin(Kt)))\right)\Bigg|_{t=0}$$

FALSA CREENCIA SIN HIPÓTESIS.

$$= \sum_{K=1}^{+\infty}\sin(Kx)\cdot(B'_K\cdot K\cos(Kt))\Big|_{t=0} = \sum_{K=1}^{+\infty}\sin(Kx)\cdot \underbrace{B'_K\cdot K}.$$

Coeficientes de Fourier tipo seno de $\tilde{g}(x)$.

En nuestro caso $\tilde{g}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

$\Rightarrow B'_k \cdot K = \frac{1}{K^3} \Rightarrow B'_K = \frac{1}{K^4}$.

Conclusión, la tentativa a solución es

$$v(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(Kx)\left(\frac{1}{K^4}\cos(Kt) + \frac{1}{K^4}\sin(Kt)\right)$$

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(Kx)}{K^4}$ $\qquad$ $\frac{1}{k^3}$

Teorema 0.3.

Sea $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \underbrace{b_k}_{1/K^4} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *y* $v_0 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b'_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ *las condiciones iniciales del problema (0.10). Si*

$$|b_k| < \frac{M}{k^4} \qquad |b'_k| < \frac{N}{k^3} \qquad N, M \in \mathbb{R}$$

entonces:

$$U(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left(A_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)\right)$$

En nuestro caso $c = 1$, $L = \pi$

con $A_k = b_K$ *y* $B_k = b'_k \frac{L}{k\pi c}$ *es solución al problema (0.10).*

Ec de ondas con bordes fijos, posición inicial u_0, velocidad inicial v_0.

En resumen, $v(x,t)$ sí es solución.

La solución completa (Ec de ondas con fuente y con bordes no fijos) nos queda:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t) = -x\sin t - x + \sum_{K=1}^{+\infty} \sin(Kx)\left(\frac{1}{K^4}\cos(Kt) + \frac{1}{K^4}\sin(Kt)\right)$$