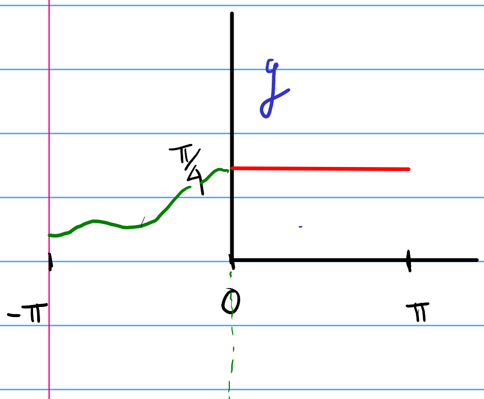
[**Prop 0.6** Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua, de período $2L$.

Entonces $S_n(f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$.]

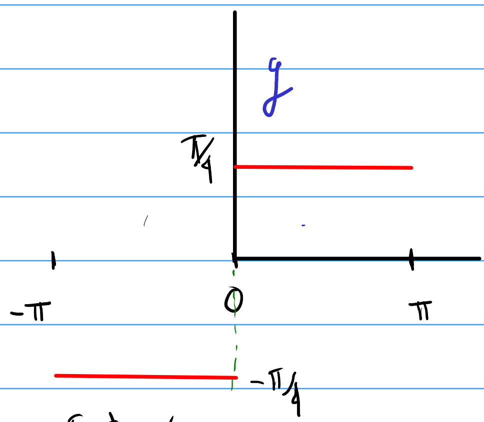
12. Probar que la serie de Fourier de tipo seno de la función constante $f(x) = \pi/4$ es:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots, \quad 0 < x < \pi.$$

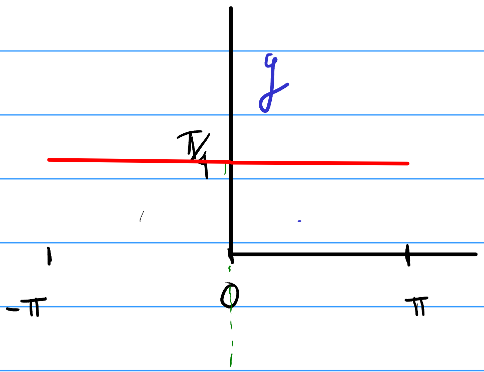
$f(x) = \pi/4$, $0 < x < \pi$. (no es de la forma $[-L, L]$).



Extensión cualquiera



Extensión impar



Extensión par.

SERIE TIPO SENO. * Si g es una extensión impar de f $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0 \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx)\,dx = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ No hay cosenos.

SERIE TIPO COSENO → Si g es una extensión par de f ⇒ $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = 0$

⇒ No hay senos.

Seguimos con el ejercicio

Serie de Fourier de tipo seno: Sea $g(x)$ la extensión impar de $f(x)$

$a_0 = 0$, $a_k = 0$,

$$\underline{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{g(x)\sin(kx)}^{\text{PAR}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx = -\frac{1}{2}\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1-\cos(k\pi)}{2k} = \frac{1-(-1)^k}{2k} = \frac{1+(-1)^{k+1}}{2k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ \frac{1}{k} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

$\frac{1}{2k-1}, k=1$ $\quad \frac{1}{2k-1}, k=2$ $\quad \frac{1}{2k-1}, k=3$

$1\cdot\sin x + \frac{1}{3}\cdot\sin(3x) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \dots$

* Calcular la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ con esta serie de Fourier.

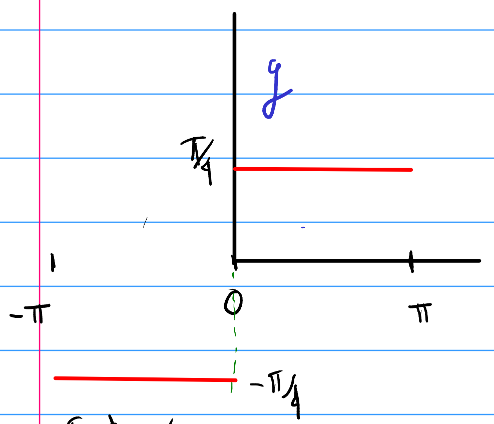
$$S_\infty(g) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)}\sin((2k-1)x)$$

Corolario (Igualdad de Parseval)

Si $f \in V \Rightarrow \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$

Por Parseval con g, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \underline{\|g\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{4^2}2\pi = \frac{\pi^2}{8}$$



Extensión impar

* ¿Qué suma se obtiene poniendo $x = \pi/2$?

$$\underline{S_\infty(g)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

$\sin(\pi/2) \xrightarrow{+\pi} \sin(\frac{3\pi}{2}) \xrightarrow{+\pi} \sin(\frac{5\pi}{2})$

$$\Rightarrow S_\infty(g)(\pi/2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)} (-1)^{k+1}$$

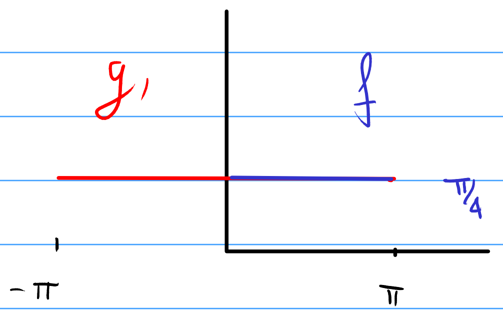
Por el teorema de Dini $S_n(g) \xrightarrow{cp} h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases}$

Entonces, en $x = \pi/2$ tengo $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} S_n(g)(\pi/2)} = g(\pi/2) = f(\pi/2) = \pi/4$

es decir, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)}(-1)^{k+1} = \pi/4$.

- La convergencia $S_n(g) \xrightarrow{c.p} h$ no es uniforme ya que $S_n(g)$ es continua $\forall n$ pero h no.

- ¿Cuál es la serie de Fourier de tipo coseno de f?



Tengo que ver cuál es $S_\infty(g)$ con $g(x) = \pi/4$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow S_\infty(g)(x) = \underbrace{\pi/4} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\langle \pi/4, \cos(kx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos(kx)\,dx = 0$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\pi/4} + \sum \underbrace{a_k}_{0} \cos(kx) + \sum \underbrace{b_k}_{0} \sin(kx)$$

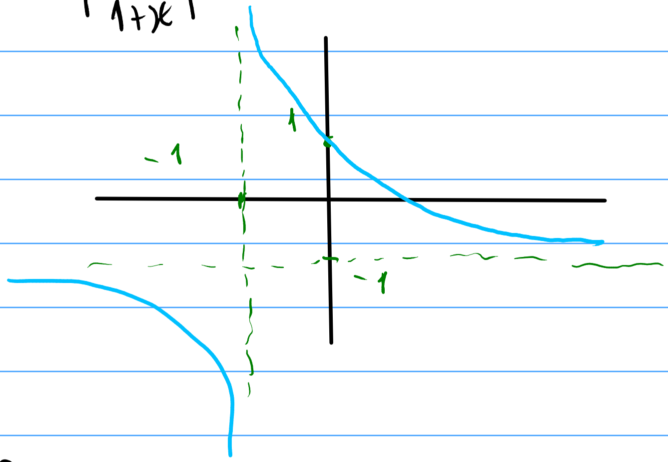
* Serie de Fourier de $\cos(x) + \sin(2x) + 5$ es ella misma.
$a_1 = 1$ $\quad b_2 = 1$ $\quad a_0/2 = 5$

$a_{10} = \langle \cos(x) + \sin(2x) + 5, \cos(10x) \rangle = \langle \cos x, \cos 10x \rangle + \langle \sin 2x, \cos 10x \rangle + \langle 5, \cos(10x) \rangle = 0 + 0 + 0 = 0.$

Son ortogonales

8. Estudiar $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\boxed{\frac{1-x}{1+x}}\right)^n$ → tiene que tener módulo <1. sino diverge.

- No converge en $\mathbb{R}$.
- Voy a estudiar cuando $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1 \iff x > 0$.



- Convergencia puntual: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)^n$ es una serie geométrica.

Como $\left|\dfrac{1-x_0}{1+x_0}\right| < 1$ entonces la serie converge.

Recordar $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k} - 1 = \frac{k}{1-k}$, $|k|<1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\underbrace{\boxed{\frac{1-x}{1+x}}}_{K}\Big)^n = \frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} = \frac{1-x}{(1+x)-(1-x)} = \frac{1-x}{2x}.$$

* No converge uniformemente en $\mathbb{R}^+ = \{x : x>0\}$. Sí converge uniformemente en cualquier compacto $\subset \mathbb{R}^+$.

Criterio de Cauchy para convergencia uniforme:

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ converge uniformemente si y sólo si la sucesión de funciones

$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)$ es de Cauchy

Es decir, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0$ tal que si $n, m > n_0$ $\sup |f_m(x) - f_n(x)| = \sup \left| \sum_{n+1}^{m} a_k(x) \right| < \varepsilon$

Acá no se cumple porque $\left| f_{n+1}(x) - f_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k(x) \right| = \left| \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n+1} \right|$

y $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n} \right| = 1 \quad \left(\lim_{x \to 0^+} = 1 \right)$.

[No importa que tan grande sea n !!].