Serie de Fourier.

$V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es continua a trozos y $2L$-periódica$\}$ ev

y $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ pi de la forma $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) g(x) \, dx$

resulta que

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right), \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right), \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \dots \right\}$$

es ortonormal. [Al final, con teoría, es una base ortonormal]

La serie de Fourier de una función $f \in V$ es la proyección ortogonal en el subespacio generado por S:

$$P_S(f) = S_\infty(f) = \boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\boxed{+\infty}} a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{\boxed{+\infty}} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)}$$

¿?

Se le llama serie de fourier a esta fórmula

Coeficientes de Fourier de f.

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx, \qquad a_k = \langle f, \cos(\tfrac{k\pi x}{L}) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx$$

$$b_k = \langle f, \sin(\tfrac{k\pi x}{L}) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Convergencia:

Teorema 0.2

Si $f \in V$ entonces

$$f \overset{\text{en el sentido de la norma de } V}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

Es decir,

$$\Big\| f - \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \right)}_{S_n(f)} \Big\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

la norma del pi

$$\left\| f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right) \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right) \right)^2 dx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Corolario (Igualdad de Parseval)

Si $f \in V \Rightarrow \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$

[Esto se puede interpretar como que el mapa $f \mapsto \{a_n\}, \{b_n\}$ es una isometría lineal].

Teorema (Dini)

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua a trozos, 2L-periódica y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \quad , \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-$$

Entonces, $\forall \ x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Es decir

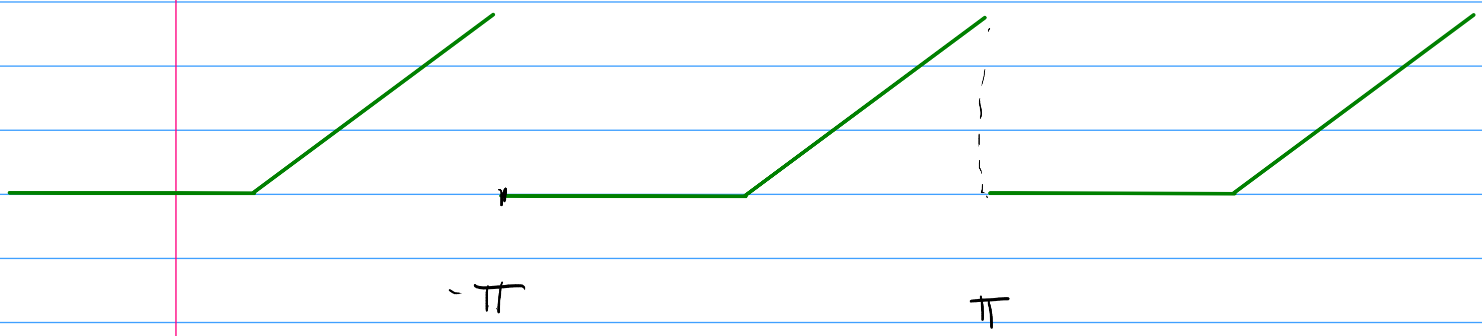
en el sentido puntual

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x_0\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x_0\right) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$$

---

10 a) Sea f la función 2π-periódica definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left. x\cdot\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(kx)\,dx}{k}\right) = \frac{1}{\pi}\left.\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|_0^{\pi}$$

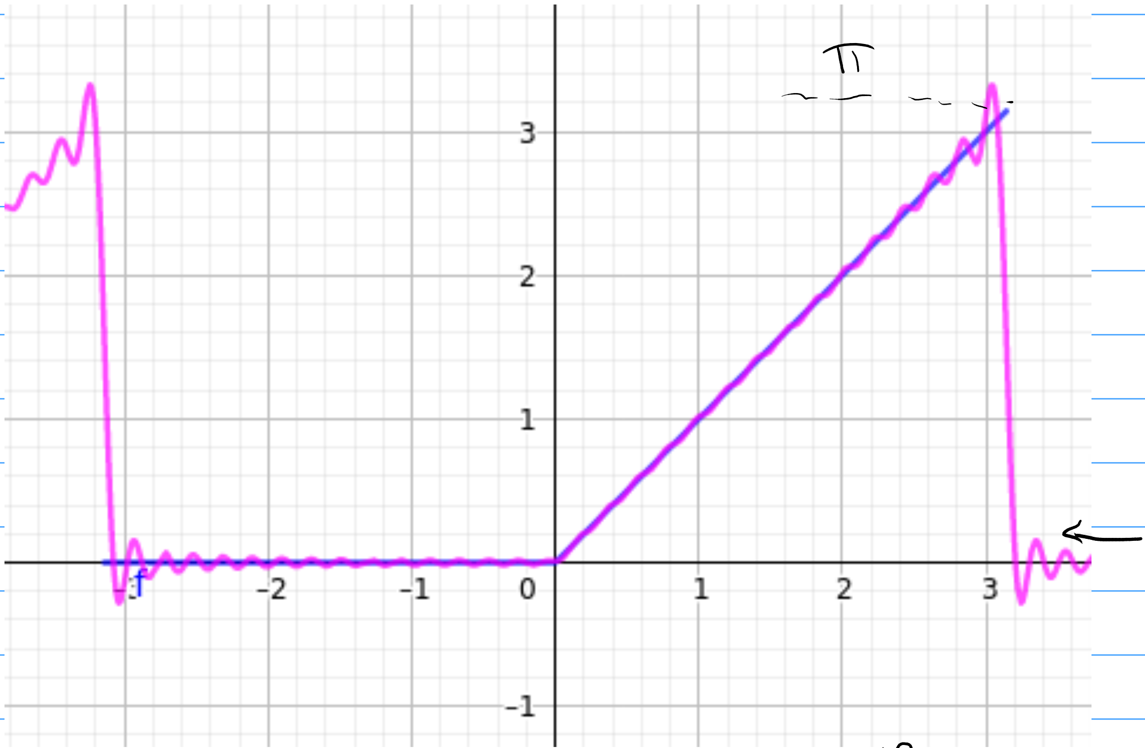
$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}$$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^K - 1}{K^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ es par} \\ \dfrac{-2}{\pi K^2} & \text{si } K \text{ es impar.} \end{cases}$$

Es igual $\rightarrow$ $b_K = \dfrac{(-1)^{K+1}}{K}$, HACER.

$$S_\infty(f) = \frac{\pi}{4} + \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{((-1)^K - 1)}{K^2}\cos(Kx) + \frac{(-1)^{K+1}}{K}\sin(Kx)$$

Vamos a geogebra:



b) Sustituyendo x por π demostrar que $\displaystyle\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(2K-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Por Dini, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi + 0}{2}$

Entonces: $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos(\overset{x=\pi}{k\pi}) + b_k \underbrace{\sin(k\pi)}_{0}$

$a_k = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{-2}{\pi k^2} & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2k-1)^2} \cdot \underbrace{\cos((2k-1)\pi)}_{-1 \ \forall k.}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

10 c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}}$ Ya lo tengo

Separé en pares e impares (¿Por qué vale?)

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ entonces puedo despejar.