$$\mathcal{L}(f(t-c))(s) \neq e^{-cs}\,\mathcal{L}(f(t))(s)$$

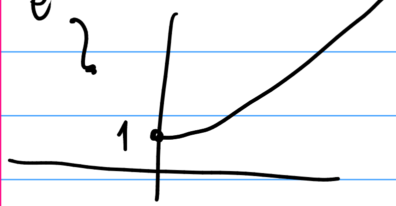
Ejemplo: $\mathcal{L}(e^{t})(s) = \dfrac{1}{s-1}$, $\quad \mathcal{L}(e^{t-2})(s) = \mathcal{L}(e^{-2}\cdot e^{t})(s) = e^{-2}\mathcal{L}(e^{t})(s)$

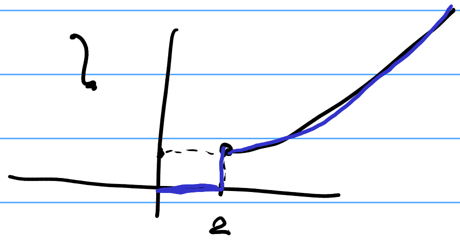
$$= \frac{e^{-2}}{s}$$

$$\mathcal{L}(\underbrace{Y(t-2)}_{\begin{cases} 0 & \text{si } t<2 \\ 1 & \text{si } t\geq 2\end{cases}} f(t-2))(s) = e^{-2s}\cdot \mathcal{L}(f(t))(s)$$

$$e^{-2s}\,\frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \underline{Y(t-2)\cdot e^{t-2}}$$

e^{t}





- $\mathcal{L}(f(t))(s-\alpha) = \mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(s)$

---

1. *a*) Enunciar el teorema de salida de compactos.

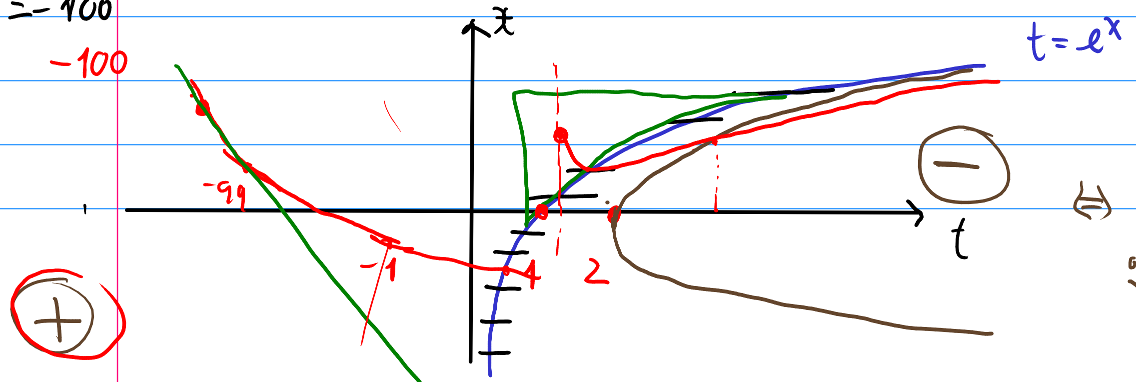
   b) Se considera la ecuación diferencial $x' = t - e^{x}$.

   i) Mostrar que el gráfico de toda solución maximal corta a la curva $t = e^{x}$. Sug: Puede ser útil estudiar la concavidad de las soluciones.

   ii) Probar que toda solución maximal tiene un mínimo y ningún máximo.

   iii) Probar que el intervalo maximal de definición de cualquier solución maximal es de la forma $(\alpha, +\infty)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. (Posible sugerencia: puede ser útil considerar la ecuación $x' = -e^{x}$)

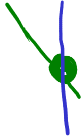
$\dot{x} = -100$



$\ddot{x} = 0$

$\iff t = 2\cosh(x) = e^{x} + e^{-x}$

$\ddot{x} \geq 0 \iff 2\cosh(x) \geq t.$



$$\ddot{x} = (t - e^x)^{\cdot} = 1 - e^x\dot{x} = 1 - e^x(t - e^x) = 1 - e^x t + e^{2x}$$

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x t + e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 1 + e^{2x} = e^x t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+e^{2x}}{e^x} = t \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} + e^{x}}_{2\cosh(x)} = t$$

$$\ddot{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x t + e^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + e^{2x} \geq e^x t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1+e^{2x}}{e^x} \geq t} \Leftrightarrow 2\cosh(x) \geq t$$

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular e^{At} escribiéndola de la forma $Pe^{Jt}P^{-1}$(8 puntos)
2. Hallar la solución de $\dot{x} = Ax$ con $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2 puntos)

"$(A-2I)v_2 = v_3$"

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$\lambda = 2$, $ma(2) = 3$, $mg(2) = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 \in \mathbb{R}^3 - W$,

$$S_2 = Ker(A - 2I) \subset W = Ker(A-2I)^2$$

$v_2 = (A-2I)v_1$, $v_3 = (A-2I)^2 v_1$

ϵS_2

$v_3 = (1,0,1)$; $v_2 = (x,y,z)$

$(A-2I)\,v_2 = v_3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dot{x} = f(x)$ con $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\ddot{x} = f(x)$

$x : I \to \mathbb{R}$

$\ddot{x} + x = 0$

$x(t) = \sin t$

Ejercicio 4

¿Pueden las soluciones de ecuaciones autónomas tener un máximo local estricto? (Para una función $f(t)$, un máximo local estricto en el tiempo $t = a$ significa que $f(a)$ es mayor que cualquier valor cercano de $f(t)$.) Asumir que la ecuación tiene soluciones únicas y definidas en todo $\mathbb{R}$.

Respuesta:

A Sí

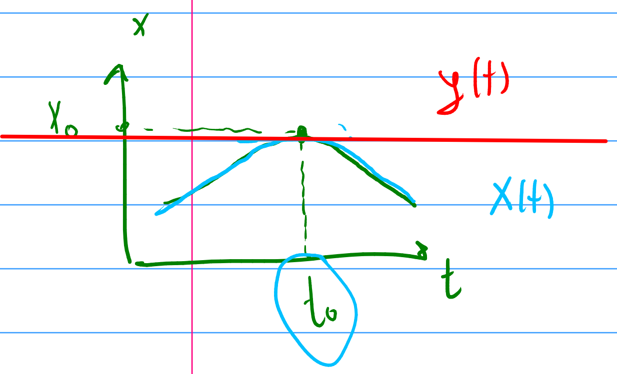
B No

$\rightarrow \left[\left[\begin{array}{l} \dot{x} = f(x) \\ x : I \to \mathbb{R}. \end{array} \right.\right.$

No tienen máximo local estricto

Sea una ec diferencial de la forma $\dot{x} = f(x)$, ... máximo local ..

$x : I \to \mathbb{R}^1$



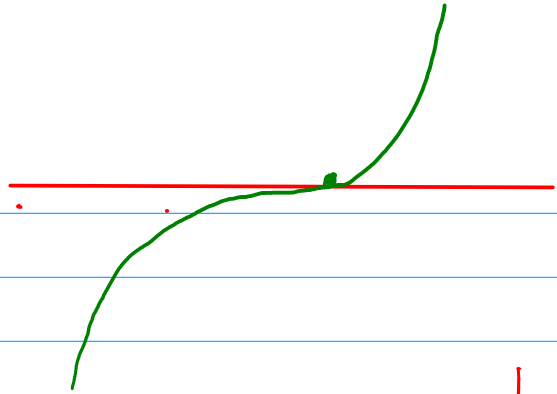
$x'(t_0) = 0$

$x'(t_0) = f(x_0) = 0$

x_0 es raíz de f

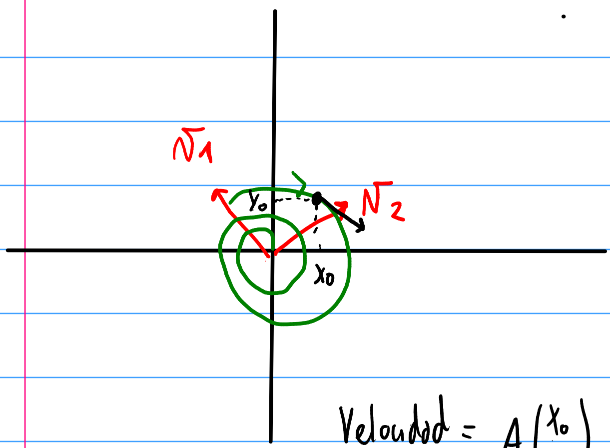
$\Rightarrow y(t) = x_0 \;\forall t$ es solución $\left(\dot{y}(t) = 0 = f(x_0) = f(y(t)) \right)$

$\sqrt{|x|}$

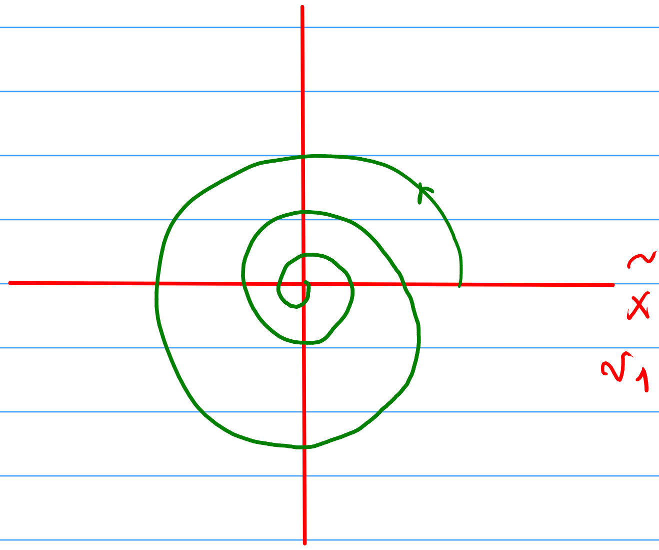


• Valores propios complejos

$$\mathcal{B} = \{ \overset{\tilde{x}}{v_1}, \overset{\tilde{y}}{v_2} \}.$$



Velocidad $= A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



$$A \rightsquigarrow \lambda = \alpha + i\beta$$
$$= \alpha - i\beta$$

$$v_\lambda \in \operatorname{Ker}(A - (\alpha+i\beta)I) \rightarrow \mathcal{B} = \{ \operatorname{Re}(v_\lambda), \operatorname{Im}(v_\lambda) \}$$

$$(A)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - (\alpha + i\beta)I \quad \left(\begin{array}{cc|c} a-(\alpha+i\beta) & b & 0 \\ \cancel{c} & \cancel{d-(\alpha+i\beta)} & \cancel{0} \end{array} \right)$$

$$(a - (\alpha+i\beta))x + by = 0, \quad x = 1 \Rightarrow \left(1, \frac{(\alpha+i\beta-a)}{b}\right)$$

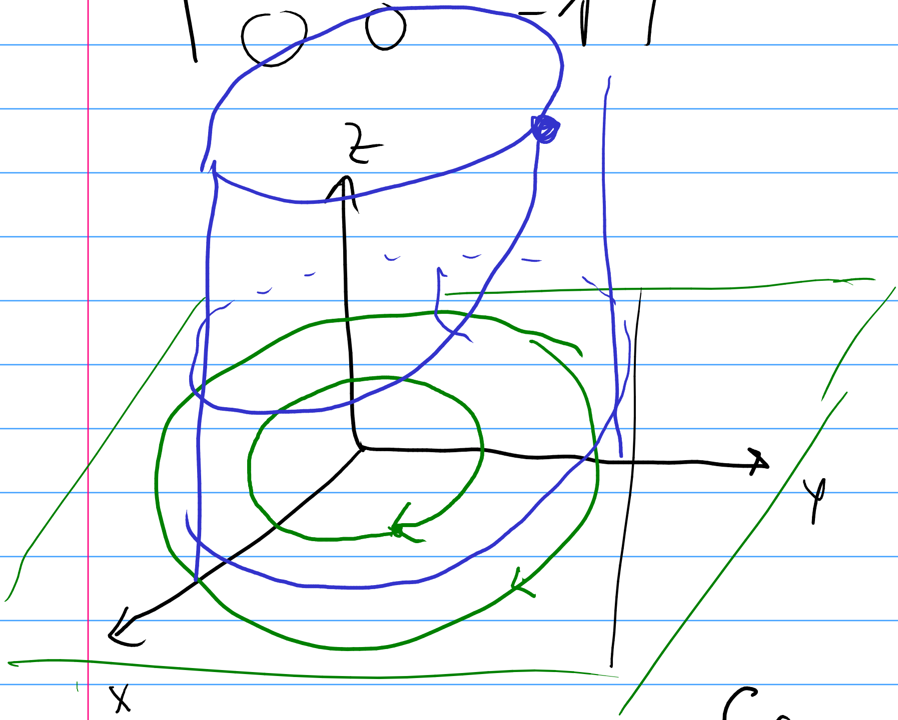
13.6) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$, $v_3 = (0,0,1)$

$\lambda = \pm i$

$v_1 = (1,0,0)$

$v_2 = (0,1,0)$



S_{-1} estable

$E_c = S_i + S_{-i} \le \mathbb{C}^3$

Creo $E_c \cap \mathbb{R}^3$ = Plano verde.

$$E_c = \underbrace{\overset{\overset{\mathbb{C}^2}{\cup|}}{S_i}}_{\dim 1} \oplus \underbrace{\overset{\overset{\mathbb{C}^2}{\cup|}}{S_{-i}}}_{\dim 1} = \mathbb{C}^2 \quad , \quad E_c \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

$$E^c = \bigoplus_{\mathrm{Re}\lambda = 0} E_\lambda \quad , \quad E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{m} \quad , \quad m = ma(\lambda)$$

$$S_i = \{ v \in \mathbb{C}^2 : Av = iv \}.$$