$f(t,x) = \dfrac{(1+x^2)t^2}{x}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$.

8. a) Sea $u: I \to \mathbb{R}$ solución maximal de la ecuación $x\dot{x} - (1+x^2)t^2 = 0$ con $u(0)=1$. Hallar $u(t)$ y ver que $I \supset [0,+\infty)$.

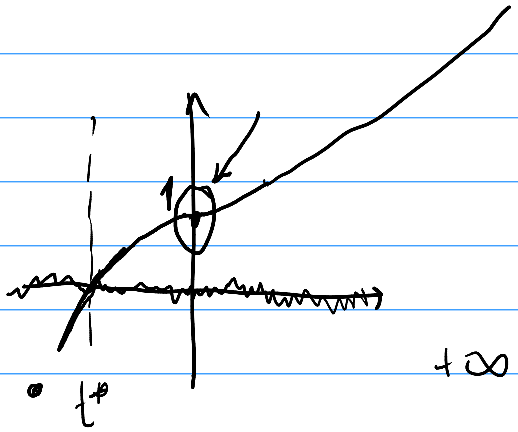
$$\frac{x\dot{x}}{1+x^2} = t^2 \rightsquigarrow \int_0^t \frac{x\dot{x}\,dt}{1+x^2} = \int_0^t t^2\,dt$$

$$\rightsquigarrow \int_1^{u(t)} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int_0^t t^2\,dt \to \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{u(t)} = \frac{t^3}{3}\Big|_0^t = t^3/3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u(t)^2}{2}\right) = t^3/3 \rightsquigarrow \frac{1+u(t)^2}{2} = e^{\frac{2t^3}{3}} \Rightarrow u(t)^2 = 2e^{\frac{2t^3}{3}}-1$$

$$|u(t)| = \sqrt{2e^{\frac{2t^3}{3}}-1} \rightsquigarrow u(t) = \sqrt{2e^{\frac{2t^3}{3}}-1}$$

en $t=0$ vale $1>0$



$$\dot{x} = \frac{(1+x^2)\,t^2}{x}$$

$$2e^{2t^3/3}-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2t^3/3} = 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^3}{3} = \ln(1/2) < 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\ln(1/2)}$$

< 0

$$\Rightarrow u: I \to \mathbb{R}, \quad I = \left(\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\ln(1/2)}, +\infty\right)$$

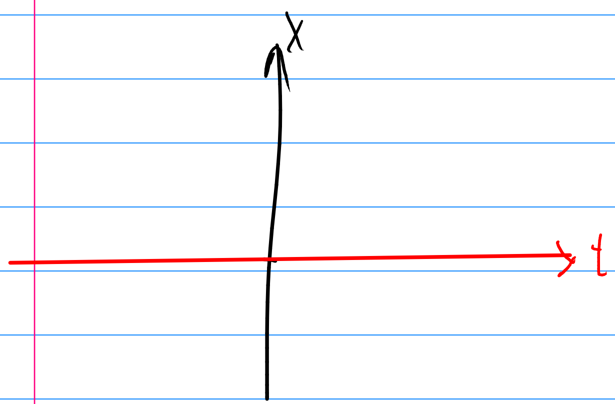
$$u(t) = \sqrt{2e^{2t^3/3}-1}.$$

b)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$F(t,x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1+x^2}{x}\,t^2 \cdot \arctan(x+t)$$

1) Determinar el dominio de F. $\quad Dom(F) = \overbrace{\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})}^{\Omega}$

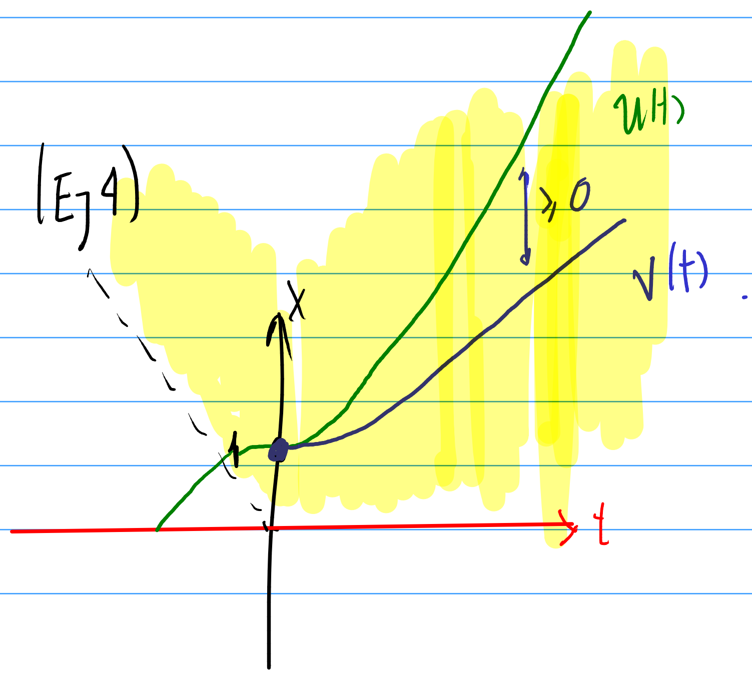


2) Verificar las hipótesis de Picard: F es $C^1 \Rightarrow$ Vale Picard. Parte a)

3) Sea $v: J \to \mathbb{R}$ solución maximal. Probar que $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq 0 \in J$.

Recordar el lema de comparación (Ej 4)

$$g(t,x) = \frac{1+x^2}{x}\,t^2$$



$$F(t,x) = \frac{1+x^2}{x}\, t^2 \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x+t)\right) \leq \frac{1+x^2}{x}\, t^2 = g(t,x)$$

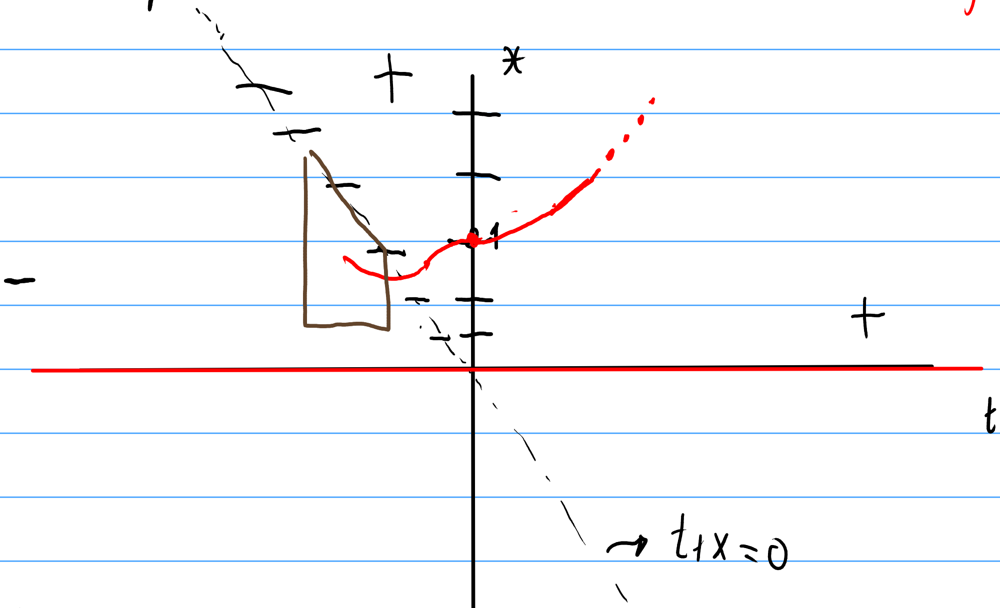
Cuando $t+x>0$, $0 < \frac{2}{\pi}\arctan(x+t) < 1$

y g es más grande que F en lo amarillo.

$\Rightarrow$ $v(t) \leq u(t)$ $\forall t \geq 0$, $t \in J$

* Hicimos la comparación en el dominio amarillo, pero como las soluciones se mantienen ahí a futuro $\Rightarrow$ Todo bien.

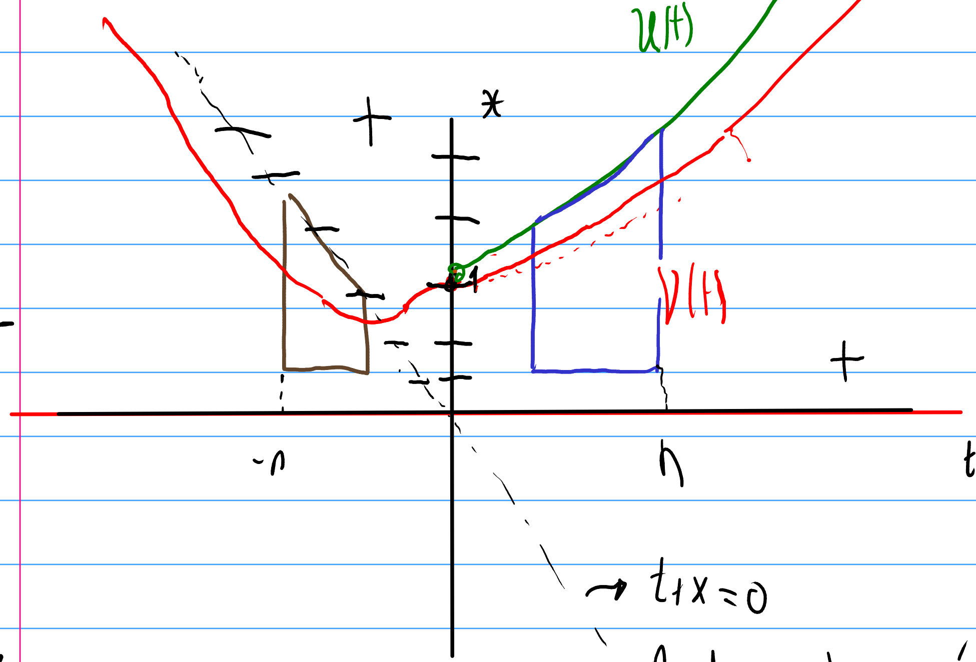
4) Probar que el intervalo maximal $J \supset [0,+\infty)$. (y de hecho $J = \mathbb{R}$).



$$\dot{x} = \frac{2}{\pi} t^2 \frac{1+x^2}{x} \arctan(x+t)$$

- $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow t=0$ o $x+t=0$
- Signo $(\dot{x})$
- Obs: Puedo estudiar $\ddot{x} \to$ puntos de inflexión

- Por el compacto maximal, la solución se sale en el pasado:
  - No puede salirse por la tapa de abajo, porque $\dot{x}<0$.
  - Por arriba tampoco.



$$\dot{x} = \frac{2}{\pi} t^2 \frac{1+x^2}{x} \arctan(x+t)$$

- $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow t = 0$ o $x+t=0$

- Signo ($\dot{x}$)

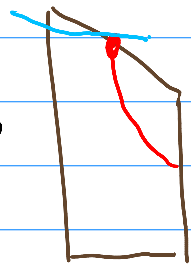
- Obs: Puedo estudiar $\ddot{x}$ → puntos de inflexión

- Tomo el compacto azul:
  - Por arriba no se escapa ($v(t) \le u(t)$)
  - Por abajo tampoco ($v(t)$ es creciente ahí).

$\Rightarrow \exists\, t > n$ tal que $t \in J$.

$\Rightarrow J = \mathbb{R}$

- Por el compacto marrón, la solución se sale en el pasado:
  - No puede salir por la tapa de abajo, porque $\dot{x} < 0$.
  - Por arriba tampoco, analizando el gráfico



$\Rightarrow \exists\, t \in J$ con $t < -n$

$\forall n \Rightarrow J \supset (-\infty, 0]$.

Ejercicio 1

Determine si el teorema de Picard garantiza o no la existencia y unicidad de una solución local para los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 2$
2. $\dot{x} = \sqrt{|t-x|}, \quad x(2) = 1$
3. $\dot{x} = \frac{t-1}{x}, \quad x(0) = 1$
4. $\dot{x} = f(t,x), \quad x(1) = 0$ con $f : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = \text{mín}\{\frac{x}{t}, t\}$

Respuesta:

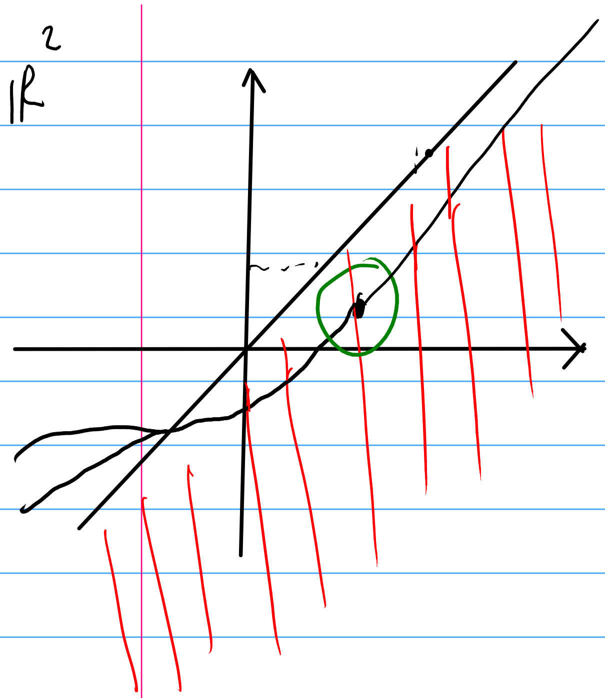
A) El teorema garantiza solución local única para todas menos 4.

B) El teorema solo garantiza solución local única para 1. y 3.

C) El teorema solo garantiza solución local única para 2. y 3.

D) El teorema garantiza solución local única para todas menos 1.

E) El teorema solo garantiza solución local única para 3.



$$\| f(t, t+\varepsilon) - f(t,t) \|$$

$$= \| \sqrt{|\varepsilon|} - 0 \| < K\varepsilon.$$

$$\frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{\varepsilon} < K$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}$$