Cultural.

La función de Weierstrass fue la primera conocida con esta propiedad. De este modo, Weierstrass mostró que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados.

La función, tal como la definió Weierstrass, es la siguiente:

> $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi, \quad a \in (0,1).$

---

1. Consideremos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$

a) Calcular el límite puntual de f_n y de f_n'. ¿Convergen uniformemente?

Dado x_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{1+\underbrace{nx_0^2}_{+\infty}} = 0$ y esto $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

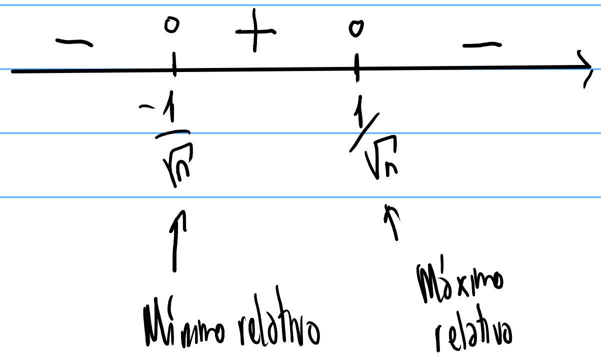
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{cp} f$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

¿Converge uniformemente?

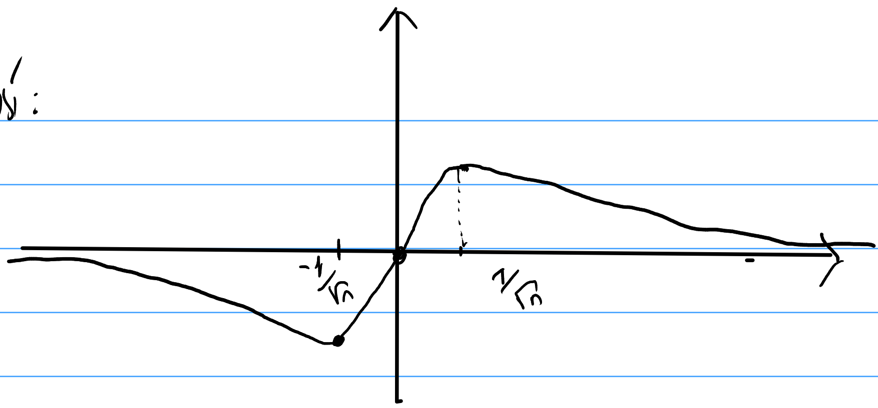
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+nx^2} \right|$$

$$f_n'(x) = \frac{(1+nx^2)1 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Signo f_n' =



Entonces f_n se ve así:



$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ $\Rightarrow$ Converge uniformemente.

* $$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n' \xrightarrow{cp} g, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

¿Converge uniformemente? No, ya que si lo hiciera como las funciones f_n' son continuas, la función límite, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sería continua.

$A \Rightarrow B$ | No $B \Rightarrow$ No A.

b) Observar que $f_n \xrightarrow{cu} f$ (Función nula) pero $\underbrace{f'}_{\text{Función nula}} \neq g$.

$$f_n' \xrightarrow{cp} g$$

Es decir: $$\frac{d}{dx}\left(\overbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}^{f}\right) \neq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{df_n}{dx}}_{g}.$$

Recordar: Sea $f_n:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 y una función $g:(a,b)\to\mathbb{R}$. Si se cumple que

1. $f_n' \xrightarrow{cu} g$

2. $\exists x_0\in(a,b)$, $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Entonces existe $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1 tal que $f_n \rightrightarrows f$ y $f'=g$

5. Sea la sucesión $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ para $x\in[0,1]$.

a) Determinar el límite puntual

Si $x\neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n x}{1+n2^n\underbrace{x^2}_{\neq 0}}=0$

Si $x=0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n x}{1+n2^n x^2}=\lim_{n\to+\infty} 0=0$.

$\Rightarrow f_n\xrightarrow{cp} f$ con $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=0\ \forall x\in[0,1]$.

b) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx$

No así nomás: la convergencia puntual (sin hipótesis extras) no me garantiza esto.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\int_0^1\frac{2n\,2^n x}{1+n2^n x^2}\,dx=\frac{1}{2n}\ln\left(1+n2^n x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\ln(1+n2^n)}{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n2^n)}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n2^n)}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln(n)}{2n}}_{\to 0}+\frac{\ln(2^n)}{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(n)}{2n}}_{\to 0} + \frac{\cancel{n}\ln(2)}{2\cancel{n}} = \frac{\ln(2)}{2}$$

Recordar: Sea una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Sean $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F_n(x) = \int_a^x f_n(s)\,ds$ y $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ entonces

1. F_n converge uniformemente a F en $[a,b]$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$.

Obs

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{\ln(2)}{2} \neq 0 = \int_0^1 \overbrace{\lim_n f_n(x)}^{0}\,dx$$

Entonces f_n no converge uniformemente a f.

Comentario: Si quieren resolver $\ln(x)+2 = x$ con calculadora, ¿cómo hacen? Tomo $x_0 = 1$, $x_1 = \ln(x_0)+2$, $x_2 = \ln(x_1)+2$

... $\begin{cases} x_n = \underline{\ln(x_{n-1})+2} \\ x_0 = 1 \end{cases}$ Si converge $\Rightarrow$ el límite cumple $L = \ln(L)+2$

Si $f(x) = \ln(x) + 2$, $\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) \\ x_0 \end{cases}$

$$\dot{x} = f(x,t) \iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,ds = T(x)$$

es decir $x = T(x)$. Tomo una función cualquiera $x_0(t)$ como candidata a resolver mi ecuación diferencial.

Claramente, $x_0 \neq T(x_0)$ pero $\begin{cases} x_n = T(x_{n-1}) \\ x_0 \end{cases}$

Resulta que $\{x_n\}$ converge uniformemente a x que es solución.

Teo (Criterio del Mayorante) Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Supongamos que exista $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq A_n$ $\forall n, \forall x \in M$. y además que $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} A_n$ converge.

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en M.

7c) Estudiar convergencia puntual y uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

<u>Convergencia puntual:</u> Yo afirmo que la serie converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a $f(x) = e^x - 1$.

$e^c \quad , 0 \leq c \leq x$

<u>Dem:</u> $\left|\underbrace{(e^x - 1)}_{f} - \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!}\right| \underset{\text{Teorema de Taylor}}{=} |r_m(x)| \underset{\text{Formula del resto}}{=} \left|\overline{f^{(m+1)}}(c) \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\right|$

Si $x>0$

$= \frac{e^c \cdot x^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{e^x \cdot x^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ Gana el factorial

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!}$ converge puntualmente a $e^x - 1$ en $\mathbb{R}$.

<u>Convergencia Uniforme:</u> 1) No converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

2) Si converge uniformemente en $[-r, r]$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

LO VEMOS LA CLASE QUE VIENE

1) Por absurdo, si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} e^x - 1$ entonces $\exists\, m_0$ tal que

$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|(e^x - 1) - \sum_{n=1}^{m_0} \frac{x^n}{n!}\right| < 3$, es decir,

$\left|\underbrace{(e^x - 1)} - \sum_{n=1}^{m_0} \frac{x^n}{n!}\right| < 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tomando límite a $-\infty$: $\left|-1-\lim\limits_{x\to-\infty}\sum\limits_{n=1}^{m_0}\frac{x^n}{n!}\right|\leq 3$

Absurdo pues un polinomio diverge en $-\infty$.

2) $\forall x\in[-r,r]$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{r^n}{n!}}}_{b_n}$$ y esta serie

convergente ya que:

Criterio de la división:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \frac{r}{(n+1)} \to 0 \Rightarrow \text{es convergente}$$

Entonces por el criterio del mayorante de Weierstrass se tiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} e^x-1.$$