Consultas

10. $\begin{cases} \dot{x} = (x^2+y^2)x + y \\ \dot{y} = (x^2+y^2)y - x \end{cases}$

Diagrama de fase:

$x = r\cos\theta \qquad \Rightarrow \quad r^2 = x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$

$\boxed{y = r\,\text{sen}\,\theta}$

$= 2x[(x^2+y^2)x+\cancel{y}] + 2y[(x^2+y^2)y - \cancel{x}]$

$= 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2(x^2+y^2)$

$= 2(x^2+y^2)(x^2+y^2) = 2r^4$

$\Rightarrow \quad \dot{r} = r^3.$

$$\dot{x} = \overset{r^3}{\dot{r}}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\, r = r^3\cos\theta - (r^2 x + y)$$

$$\| $$

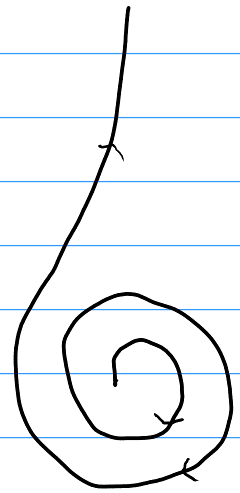
$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}x + y$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\, r = r^3\cos\theta - (r^2 r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta) = -r\,\text{sen}\,\theta$$

$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = -1.$ $\quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -1 \ \forall t$

(si $\text{sen}\,\theta \neq 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases}$$



Serie de Fourier → Poner en youtube, es una delicia!.

$$v = \sum \langle v, v_i \rangle v_i \quad , \quad \{v_i\} \xrightarrow{\text{bon}} S.$$

$$\{1, \overset{f_i}{\cos\theta}, \operatorname{sen}\theta, \cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta, \dots\} \xrightarrow{\text{b.o}} \mathcal{L}^2([0,2\pi])$$

Lebesgue

$$\text{"} f = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle f, f_i \rangle \frac{f_i}{\|f_i\|^2} \text{"} \qquad \left\{ f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} |f|^2 dx < \infty \right\}$$

Hay muchas convergencias entre funciones: puntual, uniforme, en $\mathcal{L}^p$, débil, convergencia en probabilidad, casi seguro, ...

<u>Convergencia puntual</u>: Se dice $f_n : M \to \mathbb{R}^n$ converge a $f : M \to \mathbb{R}^n$, y se denota $f_n \xrightarrow{c.p} f$, si $\forall x \in M$, $f_n(x) \to f(x)$.

Es decir, $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon, x)$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>Ejemplo</u>: $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, es decir, la sucesión

$f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}$ cumple $f_m(x) \xrightarrow{c.p} e^x$.

es decir, si $x_0 \in \mathbb{R}$, $e^{x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_0^n}{n!}$

Convergencia uniforme: Se dice que $f_n : M \to \mathbb{R}^n$ converge uniformemente a $f : M \to \mathbb{R}$, y se denota $f_n \xrightarrow{cu} f$, si

$\forall \varepsilon \; \exists n_0$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in M$

Depende solo de ε, sirve para todos los x en M.

Stone-Weierstrass. * Toda función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es límite uniforme de una sucesión de polinomios, es decir, existe una sucesión $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ de polinomios tal que $f_n \xrightarrow{cu} f$.

1. Estudiar convergencia

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow{cu} 0$ ¿ que

Dado $\varepsilon > 0$ tomo n_0 tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall n > n_0, \forall x, \; |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| = \frac{|\sin x|}{n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Prop: Una sucesión $f_n : M \to \mathbb{R}^n$, converge uniformemente a $f : M \to \mathbb{R}^n$ si y solo si $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$

1d) $i_n(x) = \dfrac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.

$i_n(x) \xrightarrow{cp} 0$ ya que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{\underbrace{(x+1)}_{\geq 2}{}^n} = \frac{x}{\infty} = 0$.

¿Converge uniformemente? $\sup_{x\in[1,2]} |i_n(x) - 0| = \sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{x}{(x+1)^n}\right|$

$= \sup_{x\in[1,2]} \frac{x}{(x+1)^n}$ f_n

$$f_n'(x) = \frac{(x+1)^n 1 - x n (x+1)^{n-1}}{(x+1)^{2n}} = \frac{(x+1)^{n-1} \cdot \left((x+1) - xn\right)}{(x+1)^{2n}}$$

$$= \frac{(x+1)^{n-1}}{(x+1)^{2n}} \cdot \left(\underline{(1-n)x + 1}\right) \Rightarrow f_n \text{ decrece en } [1,2] \text{ con } n > 3.$$

Con $n>3$, es negativo en $[1,2]$.

$$\Rightarrow \sup_{x\in[1,2]} \boxed{\frac{x}{(x+1)^n}} = \frac{1}{2^n}$$

f_n, evaluo en $x=1$, ya que f_n es decreciente

$$\Rightarrow \sup_{x\in[1,2]} |i_n(x) - 0| \underset{n>3}{=} \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow i_n(x) \xrightarrow[{[1,2]}]{c.u} 0.$$

Prop: Si $f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sucesión de funciones continuas y $f_n \xrightarrow{cu} f$, $f: M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Entonces $f : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es continua.

¿Si $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sucesión de funciones derivables y $f_n \xrightarrow{cu} f$, f es derivable?

Ejemplo: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{a^n \cos(b^n \pi x)}^{C^\infty}$, con $0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Sin embargo, $f(x)$ no es derivable en ningún x.

Función de Weierstrass.