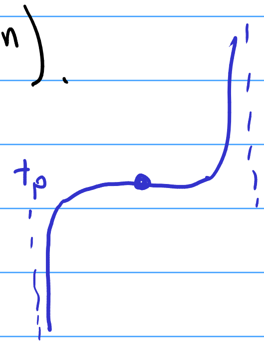
Teorema (Escape de compactos)

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, en las hipótesis de Picard y $K\subset\Omega$ compacto y $\varphi: \underline{I(t_0,x_0)}\to\mathbb{R}^n$ solución maximal con condición inicial $\varphi(t_0)=x_0$.
Entonces

$$\exists\ t_1<t_0,\ t_1\in I(t_0,x_0) \ \text{ y } \ (t_1,\varphi(t_1))\notin K$$
$$\exists\ t_2>t_0,\ t_2\in I(t_0,x_0) \ \text{ y } \ (t_2,\varphi(t_2))\notin K.$$

Corolario: Si $\varphi: I(t_0,x_0)\to\mathbb{R}^n$ es solución maximal acotada $\left(\|\varphi(t)\|<C \ \forall t\in I\right)$ entonces $I(t_0,x_0)=\mathbb{R}$. (Acá $f:\underline{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$).

O sea, las soluciones maximales o son así



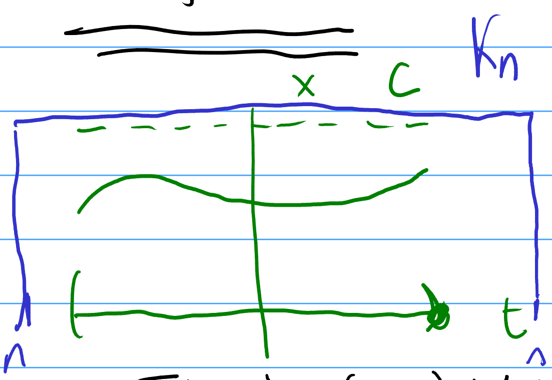
y ahí $I(t_0,x_0)=(t_p,t_f)$ o
no explota (está acotada) $\Rightarrow I(t_0,x_0)=\mathbb{R}$.

Lo que seguro es que si $I(t_0,x_0)\neq\mathbb{R}\Rightarrow$ explota.

Dem: Considero el compacto $K_n=\{(t,x): |t|\le n,\ \|x\|\le C\}\subset\overset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}{\Omega}$

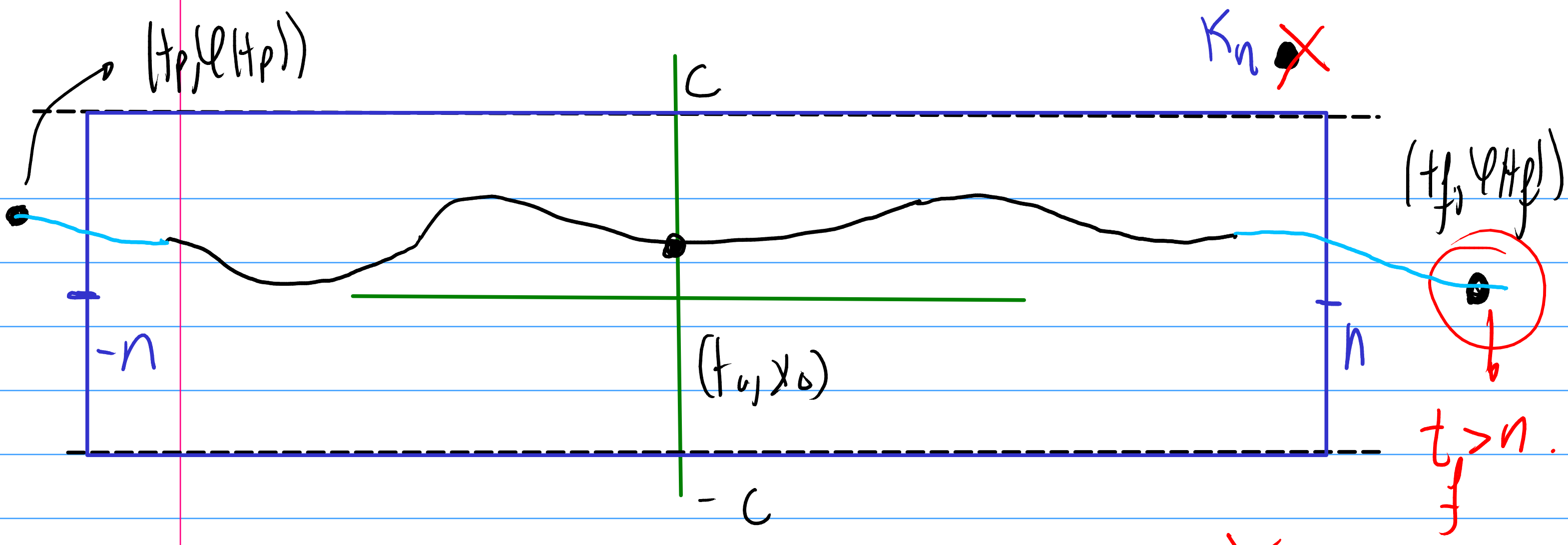
Por escape de compactos $\exists\, t_f,\ t_f>t_0$, tal que $\underline{(t_f,\varphi(t_f))\notin K_n}$

$\Leftrightarrow \ t_f>n$ o $\underbrace{\|\varphi(t_f)\|>C}_{\text{NO PASA, POR HIPÓTESIS}}$



$\Rightarrow \exists\ t_f\in I(t_0,x_0)$ tal que $t_f>n$ $\ \Rightarrow I(t_0,x_0)\supset(t_0,n)\ \forall n$

$\Rightarrow I(t_0,x_0)\supset(t_0,+\infty)$.



$\exists\ t_f>t_0,\ t_f\in I(t_0,x_0),\ (t_f,\varphi(t_f))\notin K_n \Rightarrow t_f>n$

$\exists\ t_p<t_0,\ t_0\in I(t_0,x_0),\ (t_p,\varphi(t_p))\notin K_n \Rightarrow t_p<-n$

$\Rightarrow I(t_0,x_0)\supset(-n,n)\ \forall n \Rightarrow I(t_0,x_0)=\mathbb{R}.$ //

Prop: Las soluciones maximales de $\dot{x}=A(t)x+c(t)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$. Donde $t\mapsto A(t)$ es continua.
$t\mapsto c(t)$ es continua.

---

7. Se considera la ecuación diferencial $\dot{x}=\underbrace{\cos(t+x)}$.

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

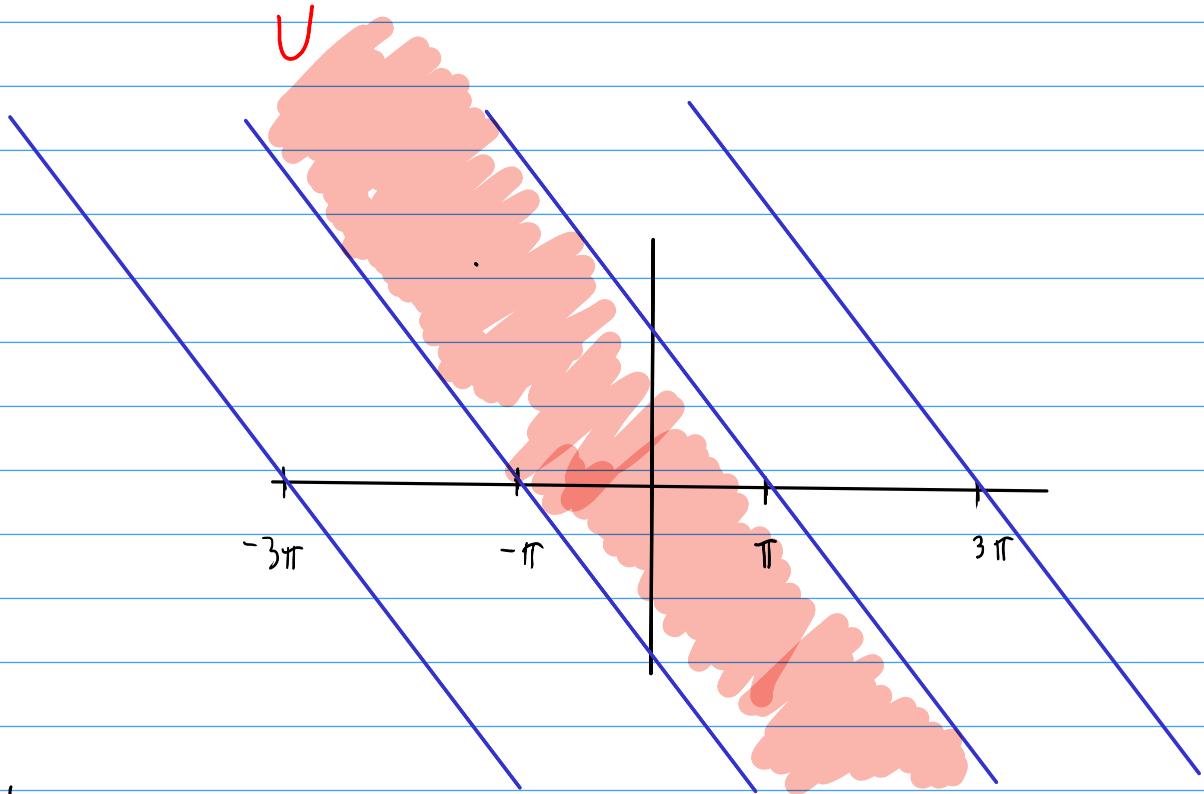
a) Buscar soluciones de la forma $x(t)=at+b$

Sustituyo y tengo $a=\cos((a+1)t+b)\ \forall t$ seguro $a=-1$

$\Rightarrow -1=\cos(b) \Rightarrow b=\pi+2k\pi$

$\Rightarrow x_k(t)=-t+\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

b) Probar que todas las soluciones son maximales

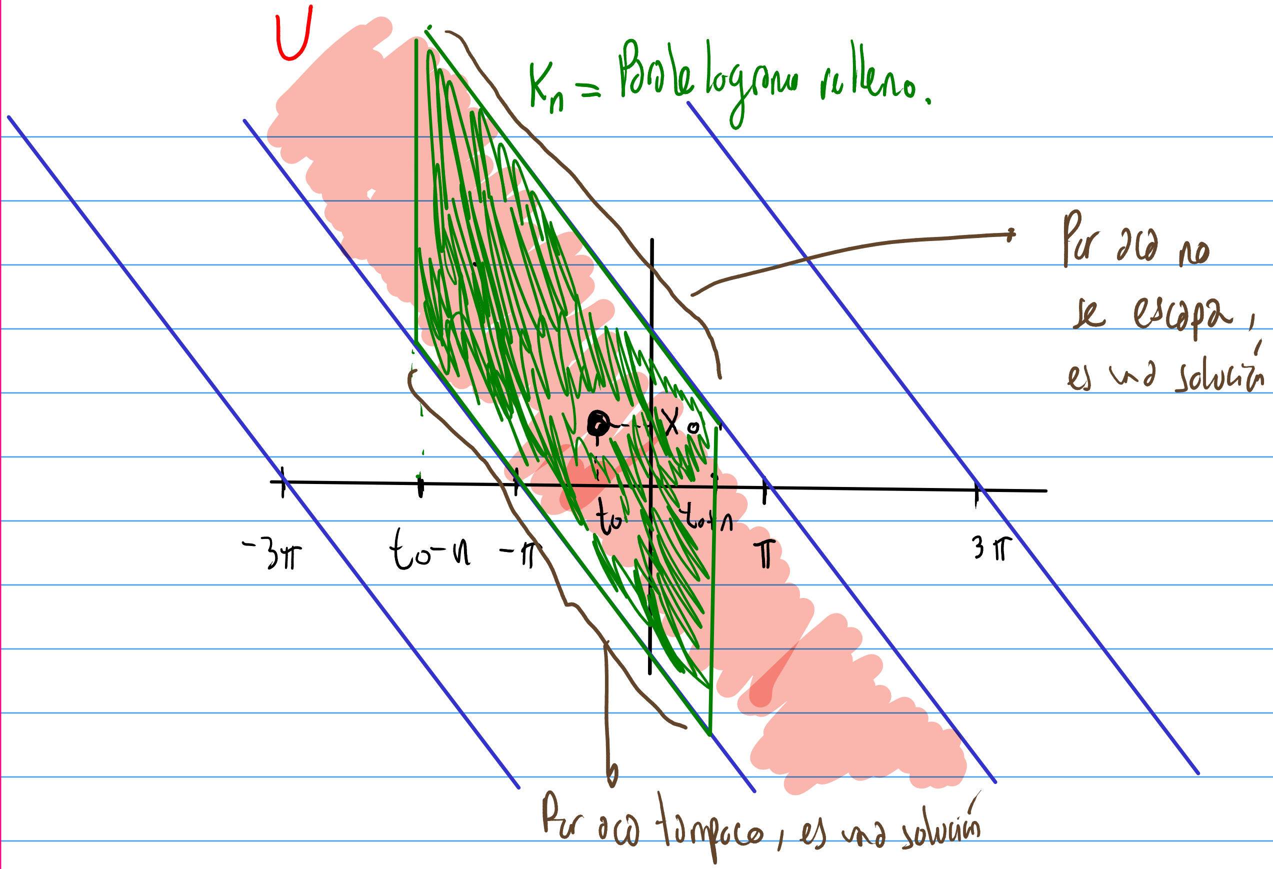


- Las soluciones de la parte anterior, $x_k(t)$ son las azules, están definidas en todo $\mathbb{R}$
- Me queda estudiar las soluciones que arrancan fuera de las rectas azules.
- Es una consecuencia de Picard que las soluciones no se cruzan.

Sea $U := \{(t,x) : t+x > -\pi , t+x < \pi\}$ → Las soluciones con condición inicial en U se mantienen en U $\forall t$:

Si $(t_0, \varphi(t_0)) \in U \Rightarrow (t, \varphi(t)) \in U \ \forall t$.

Sea $(t_0, x_0) \in U$, considero $K_n = \overline{U} \cap \{(t,x) : t \geq t_0 - n , t \leq t_0 + n\}$



$\exists\, t_f > t_0$, $t_f \in I(t_0, x_0)$ y $(t_f, \varphi(t_f)) \notin K$. Como las soluciones no se cruzan, entonces

$$\begin{cases} (t_f, \varphi(t_f)) \notin K \\ t_f > t_0 \end{cases} \Rightarrow t_f > t_0 + n. \quad \Big| \text{ "Se escapa por el tiempo".}$$

$\Rightarrow I(t_0, x_0) \supset (t_0, t_0+n)$. Análogamente al pasado y obtengo que $I(t_0, x_0) \supset (t_0 - n, t_0 + n)$ $\forall n \Rightarrow I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$.

c) Hallar el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Máximos y mínimos: $\dot{x} = 0$ y $\ddot{x} \neq 0$.

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \cos(\underbrace{t+x}_{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} t + x = \pi/2 + 2k\pi \\ t + x = -\pi/2 + 2k\pi \end{array}$$

$\dot{x} = \cos(t+x) \Rightarrow \ddot{x} = -\sin(t+x)(1+\dot{x}) = -\sin(t+x)\cdot(1+\cos(t+x))$.

Si $\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos(t+x) = 0 \\ y \\ \sin(t+x) = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -\sin(t+x) = \pm 1 \neq 0$.

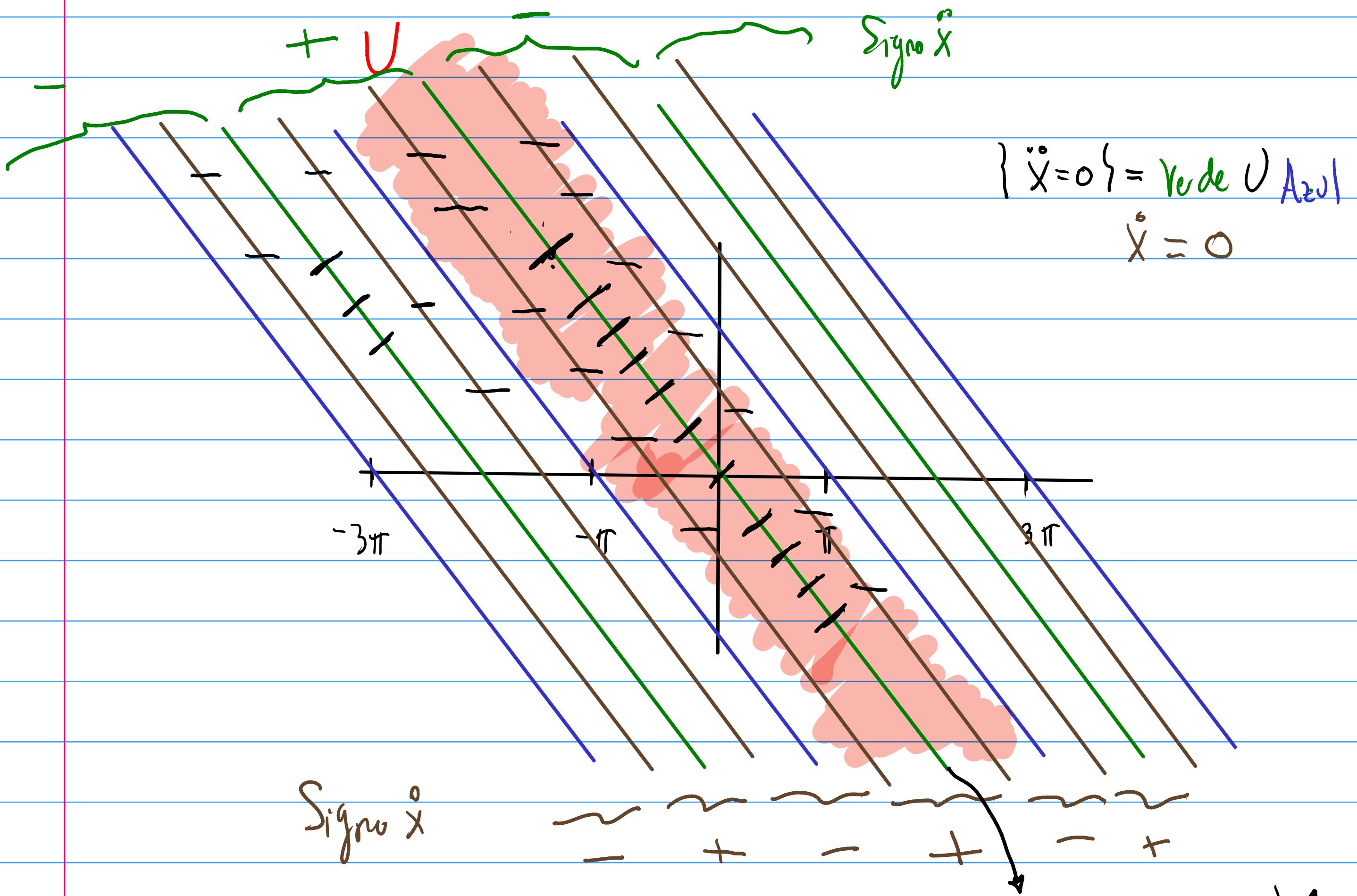
$\Rightarrow$ Las soluciones que pasan por las rectas $t+x = \pi/2 + 2k\pi$, $t+x = -\pi/2 + 2k\pi$ tienen extremo ahí.

Puntos de inflexión: $\ddot{x}$ cambia de signo

$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow$ $-\sin(t+x) = 0 \longrightarrow \boxed{t+x = k\pi}$

o

$(1+\cos(t+x)) = 0 \longrightarrow$ se anula en las rectas azules



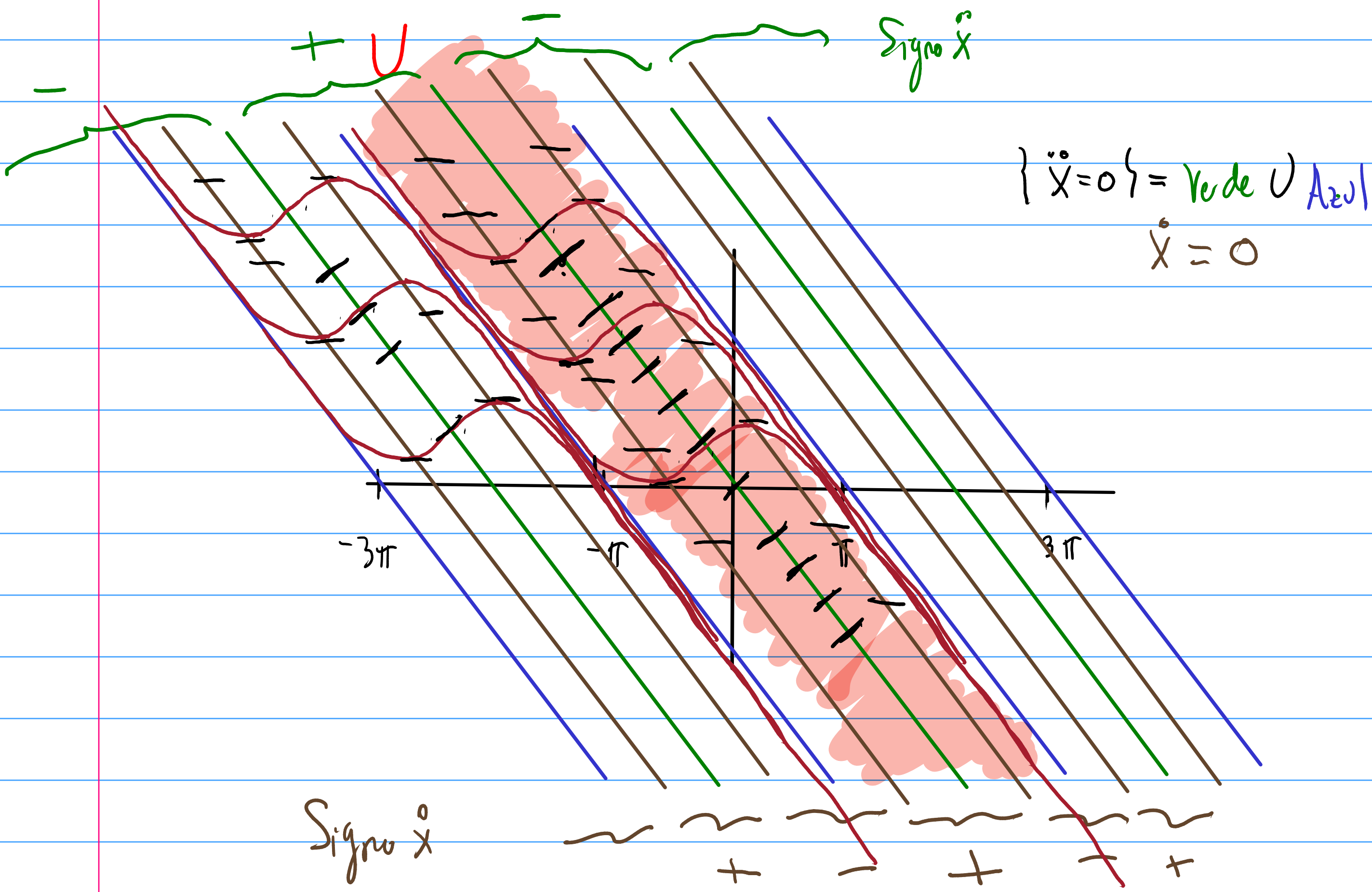
$\Rightarrow$ Las soluciones que pasan por $\ddot{x}=0$ verdes cruzan $\Rightarrow$ Cambian de concavidad

$\Rightarrow$ Ahí hay punto de inflexión

Resumen: Puntos de inflexión = Los verdes

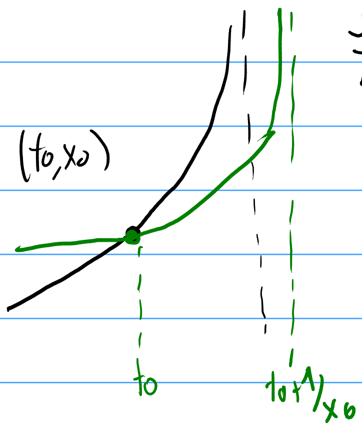
Extremos = Los marrones.

d) Bosquejar soluciones.



CONSULTAS, IDEAS

$x_0 > 0$



$f(t,x) = t^2 + x^2$

$\underset{x^2}{\underset{\parallel}{g(t,x)}} \leq f(t,x)$