7b) $u : (0,\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta u := \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}$$

$U(x,t) = X(x)Y(y) \Rightarrow \Delta U = 0 \Leftrightarrow X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) = \mu X(x) \\ Y''(y) = -\mu Y(y) \end{cases}$$

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0,\ X(\pi) = 0. \Rightarrow \mu < 0$

$\mu = -\alpha^2$: $X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$, $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = k, & k \in \mathbb{Z}. \\ A = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Para cada $k \in \mathbb{N}$, tengo $\mu = -k^2$, $X_k(x) = B_k \sin(kx)$

Luego $Y_k''(y) = k^2 Y_k(y) \Rightarrow Y_k(y) = C_k e^{ky} + D_k e^{-ky}$

$\Rightarrow u_k(x,t) = \sin(kx)\cdot(C_k e^{ky} + D_k e^{-ky})$, $k \in \mathbb{N}$

Cualquiera de estas soluciones cumplen todo menos $u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi)$

Considero entonces $u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(kx)\cdot(C_k e^{ky} + D_k e^{-ky})$

Entonces $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (C_k + D_k)\sin(kx) = x(x-\pi)$, $x \in (0,\pi)$

$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} (C_k e^{k\pi} + D_k e^{-k\pi})\sin(kx) = x(x-\pi)$, $x \in (0,\pi)$

Sea $(A_k)_{k=1}^{+\infty}$ los coeficientes de Fourier tipo seno de $x(x-\pi)$, $x\in(0,\pi)$.

entonces C_k y D_k son los únicos que resuelven $\begin{cases} C_k+D_k = A_k \\ C_k e^{k\pi}+D_k e^{-k\pi} = A_k \end{cases}$

Def: $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación diferencial $\dot{x}=f(x)$. Un punto $\bar{x}\in\Omega$ es de equilibrio si $f(\bar{x})=0$. Decimos que

- $\bar{x}$ es estable si $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \|\varphi_{x_0}(t)-\bar{x}\|<\varepsilon\ \forall t>t_0$ $[\varphi_{x_0}:I(x_0)\to\mathbb{R},\ I(x_0)\supset[0,+\infty)]$
- $\bar{x}$ es asintóticamente estable si es estable y además $\exists\delta>0$ tal que si $\|x_0-\bar{x}\|<\delta \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\varphi_{x_0}(t)=\bar{x}$.
- $\bar{x}$ es inestable si no es estable

Lyapunov:

- Necesito $V:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(0,0)\in U$ de equilibrio y además

1) $(x,y)=(0,0)$ sea un mínimo estricto

2) $\dot{V}:U\to\mathbb{R}$, $\begin{cases}\dot{V}(x)<0\ \ \forall x\in U-\{(0,0)\}\ \text{(Lyap 2)} \\ \dot{V}(x)\leq 0\ \ \forall x\in U\ \text{(Lyap 1)}.\end{cases}$

Teorema (Cetaev)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

1). $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $U-\{\bar{x}\}$ con $x_n\xrightarrow{n\to+\infty}\bar{x}$ y $V(x_n)<V(\bar{x})$

2). $\dot{V}(x)<0\ \ \forall x\in U-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable.

Prop

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en $\bar{x}$
- $\dot{V}>0$ $\forall x\in\Omega-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable

Teorema de Hartman-Grobman

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ función de clase C^1 y $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$. Entonces

1) Si todos los valores propios de $Jf(\bar{x})$ tienen parte real negativa entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable

2) Si $J_f(\bar{x})$ tiene un valor propio positivo $\Rightarrow \bar{x}$ es inestable

Convergencia puntual: Se dice $f_n:M\to\mathbb{R}^n$ converge a $f:M\to\mathbb{R}^n$, y se denota $f_n\xrightarrow{c.p} f$, si $\forall x\in M$, $f_n(x)\to f(x)$.

Es decir, $\forall x\in M$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ $n_0(\varepsilon,x)$ tal que $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$.

Convergencia uniforme: Se dice que $f_n:M\to\mathbb{R}^n$ converge uniformemente a $f:M\to\mathbb{R}$, y se denota $f_n\xrightarrow{c.u} f$, si

$\forall\varepsilon$ $\exists n_0$ tal que $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$ $\forall x\in M$

Depende solo de ε sirve para todas las x en M.

Prop: Si $f_n : M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ sucesión de funciones continuas y $f_n \xrightarrow{cu} f$, $f: M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Entonces $f: M \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es continua.

Prop Sea $f_n : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 y una función $g:(a,b) \to \mathbb{R}$. Si se cumple que

1. $f_n' \xrightarrow{cu} g$

2. $\exists x_0 \in (a,b)$, $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Entonces existe $f:(a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 tal que $f_n \rightrightarrows f$ y $f' = g$.

Prop: Sea una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Sean $F_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F_n(x) = \int_a^x f_n(s)\,ds$ y $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ entonces

1. F_n converge uniformemente a F en $[a,b]$.

2. $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,dx$.

Teo (Criterio del Mayorante) Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones.

Supongamos que existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq A_n$ $\forall n, \forall x \in M$. y además que $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} A_n$ converge.

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n \geq 1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en M.

Serie de Fourier de f, 2L-periódica: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \ , \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx \ , \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx .$$

Igualdad de Parseval

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx =: \|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2$$

Teorema (Dini)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua a trozos, 2L-periódica y tal que $\forall x\in\mathbb{R}$ existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \ , \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-$$

Entonces, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} .$$

- $u_t(0,x) = \sum^{+\infty} M_n\sqrt{n^2+1}\,\cos nx = 2\cos(3x) - \sqrt{2}\cos(2x)$ $\quad n=2$

$= f(x) \ , \ x\in(0,\pi)$

La serie de Fourier tipo coseno de f me da una igualdad de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

Teorema 0.6.

Sea el problema:

$$(0.13) \qquad \begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ U(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ U_t(0,x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $u_0 \in C^2$ *y* $v_0 \in C^1$*, entonces:*

$$U(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds$$

es una solución al problema (0.13).

- 7d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$

a_n

- Converge puntualmente en $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!}$ es convergente

por ejemplo por el criterio de la división

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n}{\to} 0 \Rightarrow \sum_{n}^{+\infty} a_n \text{ Converge.}$$

- Converge uniformemente en todo intervalo acotado por r.

ya que $\displaystyle\left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}$, con $r > |a|, |b|$.

$x \in$ Intervalo $\Rightarrow |x| \leq r$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} < +\infty \Rightarrow \text{PCR MW} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ CU en } [a,b].$$

- No converge uniformemente en $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \sin x \quad \text{si y sólo si}$$

$$\underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \underbrace{\sin x}_{\text{acotado}} \right|}_{+\infty\ \forall m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

polinomio.

PRG- 11 : $a_0 = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$ $\quad b_K = -\dfrac{(-1)^K}{K\pi} \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi}) \dfrac{-K^2}{K^2+1}.$

$$a_K = \frac{(-1)^K}{\pi} \boxed{1} \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\boxed{K^2+1}}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_K \underbrace{\cos(Kx)}_{(-1)^K} + b_K \underbrace{\sin(Kx)}_{0} \Big|_{x=\pi} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

Discontinuidad

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} + \sum_{1=1}^{+\infty} \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(K^2+1)} = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

Pr 6, 2c

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$, convergencia puntual y uniforme

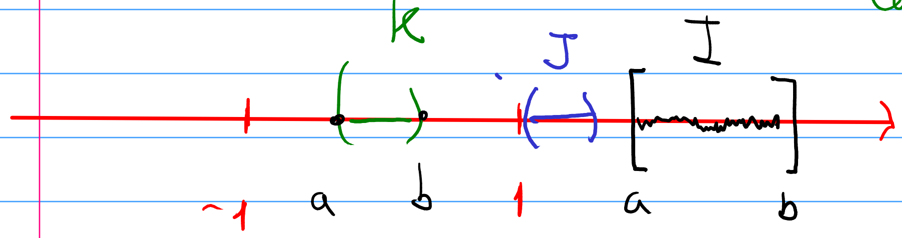
Si $|x|<1$, $x^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Si $x = \pm 1$, $x^{2n} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^{2n}} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$

Si $|x|>1$, $x^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{CP} \begin{cases} 1 & \text{si } |x|<1 \\ 1/2 & \text{si } |x|=1 \\ 0 & \text{si } |x|>1 \end{cases}.$$

- No converge uniformemente en $\mathbb{R}$, ya que no es continua.



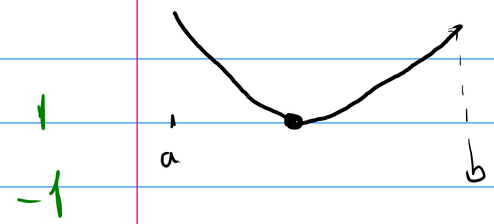
$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in I} \left| \frac{1}{1+x^{2n}} \right| = \frac{1}{1+a^{2n}}$$

y esto tiende a 0. $\Rightarrow$ Converge uniforme en I.

$$\sup_{x\in J} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in J} \left| \frac{1}{1+x^{2n}} \right| = \frac{1}{2} \not\to 0 \Rightarrow$$ No converge uniformemente.

$$\sup_{x\in K} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in K} \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \sup_{x\in K} \left| \frac{-x^{2n}}{1+x^{2n}} \right|$$

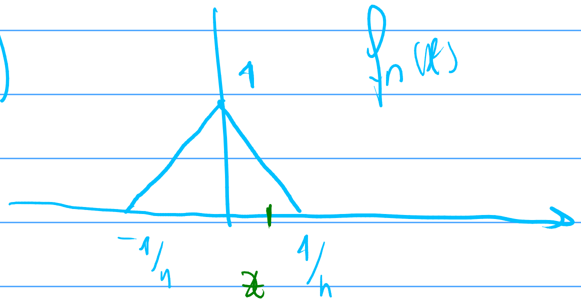
$$- \sup_{x\in K} \left| \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \right| = \sup_{x\in K} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \underset{x\neq 0}{=} \sup_{x\in K} \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$$



1, $c = \max\{|a|,|b|\} < 1$
1

$$- \sup_{x\in K} \left| \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \right| \leq \frac{c^{2n}}{1+c^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \text{Convergencia uniforme,}$$

2d)



$f_n(x) = 0$ si $n \geq N_0(x)$

$f_n(x) \to 0$ si $x \neq 0$

Si $x=0$, $f_n(x)=1 \ \forall n \Rightarrow f_n(0) \to 1$.

$$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{cp} \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

No hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ pues el límite no es continuo.

- $$\Delta u = \frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2}$$

Coord polares.