Sea $\dot{x} = f(\underset{\mathbb{R}}{t}, \underset{\mathbb{R}^n}{x})$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

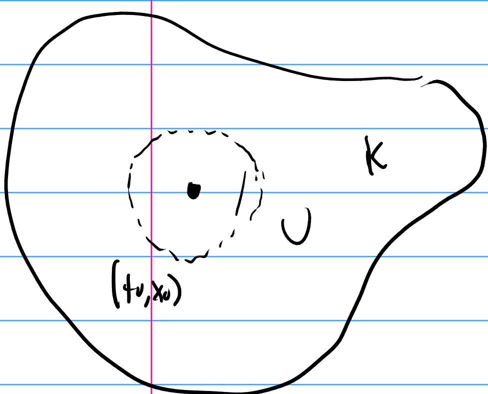
* **Peano**: Si f es continua entonces $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ existe una solución de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Ej 2:
$$\dot{x} = \begin{cases} \dfrac{4t^3 x}{t^4 + x^2} & \text{si } (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (t,x) = (0,0) \end{cases} =: f(t,x)$$

a) Probar que $\forall c \in \mathbb{R}$, $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}$ es solución con condición inicial $x(0) = 0$.

$\therefore$ INFINITAS SOLUCIONES. $\because$ $t \cdot \dfrac{4t^2 x}{t^4 + x^2}$ acotado va a ser continua. $\underset{\to 0}{t}$

Def: Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice localmente Lipschitz respecto a la variable espacial si $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ $\exists K > 0$, U abierto con $(t_0, x_0) \in U$ tal que

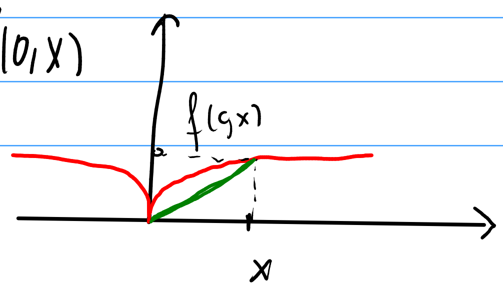


$$\| f(t,x) - f(t,y) \| < K \|x - y\| \quad \forall (t,x), (t,y) \in U$$

Si despejo $(x \neq y)$ tengo cociente incremental menor a K
$$\frac{\| f(t,x) - f(t,y) \|}{\| x - y \|} < K.$$

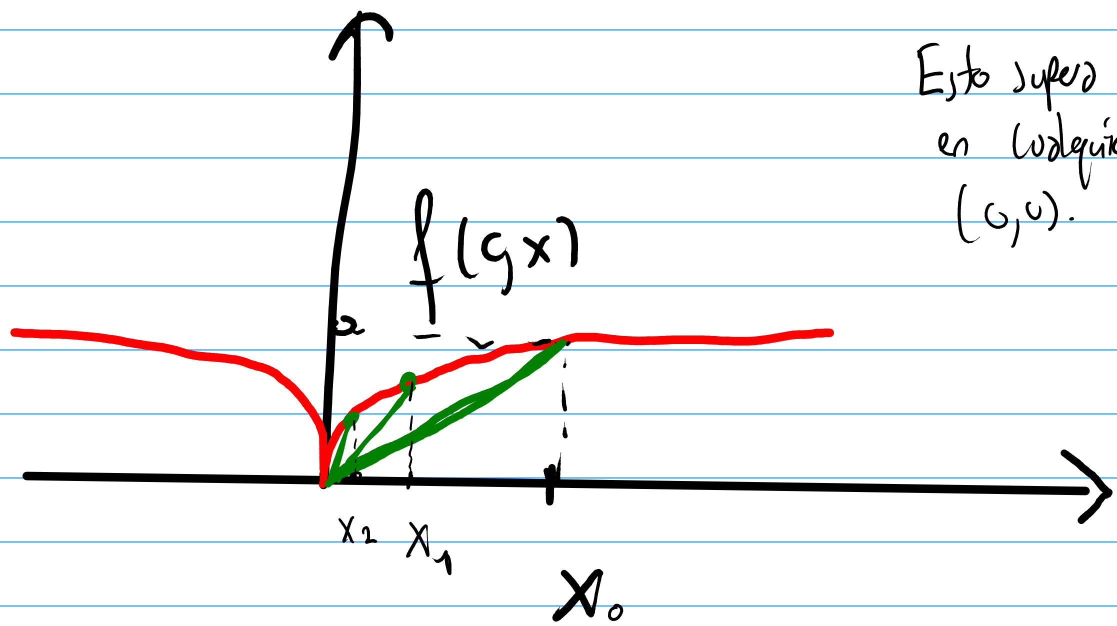
Ejemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(t,x) = \sqrt{|x|}$, no es localmente Lipschitz respecto a la variable espacial

$\sqrt{|x|} = f(0,x)$



$$\frac{\| f(0,x) - f(0,0) \|}{\| x \|}$$ pendiente de la recta verde.

Se ve por el gráfico que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\|f(0,x) - f(0,0)\|}{\|x\|} = +\infty$



Esto supera cualquier cota en cualquier entorno de $(0,0)$.

<u>Teo</u>: Si $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es $C^1 \Rightarrow$ Es loc. Lipschitz respecto a la variable espacial.

<u>Teo</u> (Picard) Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y loc Lipschitz respecto a la variable espacial y $(t_0, x_0) \in \Omega$

1. $\exists \alpha > 0$ tal que la ec dif

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.

E2b) Tenemos $\dot{x} = \begin{cases} \dfrac{4t^3 x}{t^4 + x^2} & \text{si } (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} =: f(t,x)$

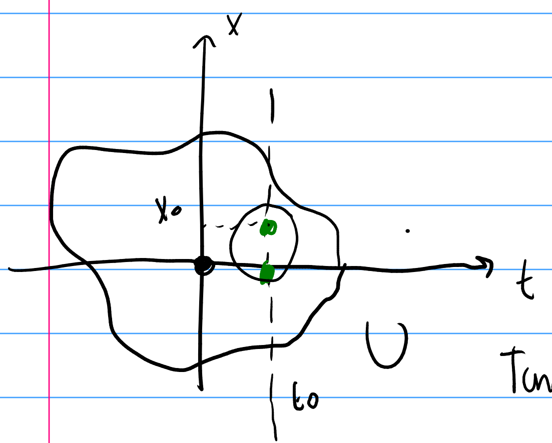
y tenemos infinitas soluciones con condición inicial $(0,0)$

¿Qué hipótesis de Picard falla?

Como es continua lo que falla es en ser localmente Lipschitz respecto a la variable espacial.

También lo podemos ver "a mano", no es localmente Lipschitz respecto a la variable espacial en $(0,0)$

$K>0$ cualquiera.



Quiero ver que no se cumple

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| < K\|x-y\| \quad \forall (t,x),(t,y) \in U.$$

Tomo $t_0>0$

$$\|f(t_0,x_0)-f(t_0,0)\| = \left\| \frac{4t_0^3x_0}{t_0^4+x_0^2} - 0\right\| = \frac{4t_0^3x_0}{t_0^4+x_0^2} < K\underbrace{\|(t_0,x_0)-(t_0,0)\|}_{=Kx_0}$$

$$\frac{4t^3x}{t^4+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4t_0^3}{t_0^4+x_0^2} < K \underset{\substack{\text{Tomo límite}\\ x_0\to 0}}{\Rightarrow} \frac{4t_0^3}{t_0^4} \leq K \Rightarrow \frac{4}{t_0} \leq K$$

Pero esto vale $\forall t_0$ incluso con $t_0 \to 0 \Rightarrow$ esta constante K y este U

no funcionan $\Rightarrow$ Como eran arbitrarios, ningún K y U funcionan $\Rightarrow$

No es loc. Lipschitz.

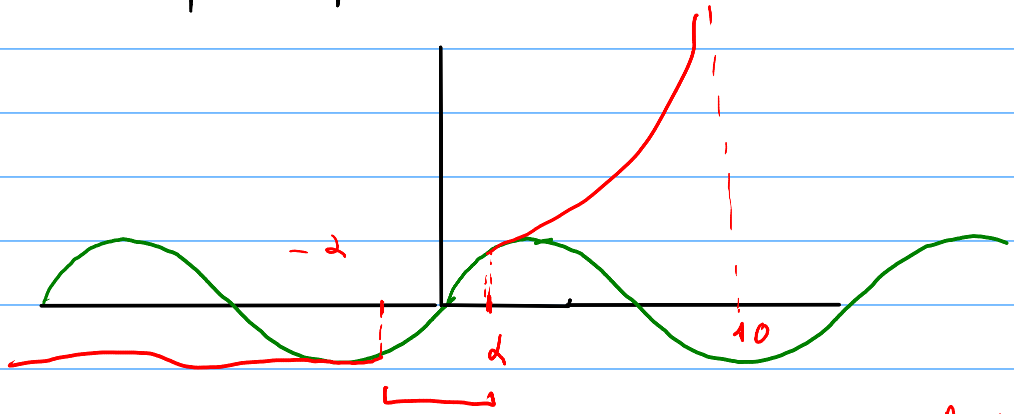
Ejemplo: Picard me dice que hay una única solución a

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

definida en $(-\alpha, \alpha)$. ¡Tal vez α es muy pequeño!

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = \sin(t)$. Picard solo me dice que es única en $(-\alpha, \alpha)$

entonces en principio podría tener dos soluciones así:



Son iguales en $(-\alpha,\alpha)$ $\Rightarrow$ No rompe Picard. EN PRINCIPIO!!
(AL FINAL NO)

Def: Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solución de $\dot{x} = f(t,x)$.
Se dice maximal si no existe $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ solución de $\dot{x} = f(t,x)$
$J \underset{\neq}{\supset} I$ y $\psi(t) = \varphi(t)$ $\forall t \in I$.

Ejemplo: $\dot{x} = 7x$, $\varphi : (-2,2) \to \mathbb{R}$ con $\varphi(t) = e^{7t}$ es solución

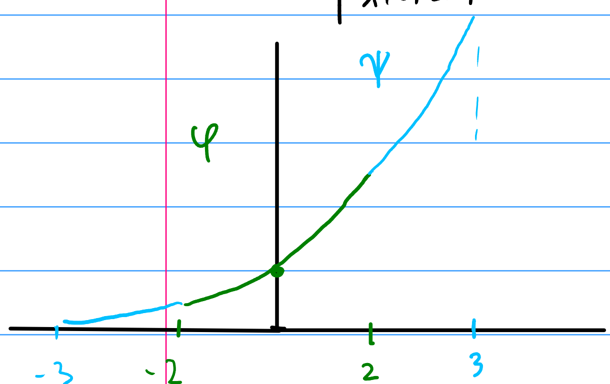
de $\begin{cases} \dot{x} = 7x \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

¿Es maximal? No, por ejemplo

$\psi : (-3,3) \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = e^{7t}$

, y $\psi(t) = \varphi(t)$ si $t \in (-2,2)$

$\Rightarrow \varphi$ no es maximal.

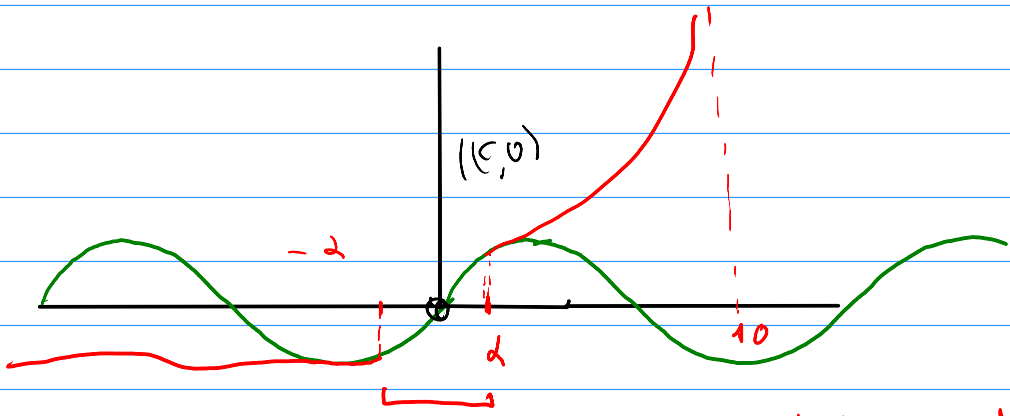


De hecho $h: \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, con $h(t) = e^{7t}$ es solución

y es maximal ya que no se puede extender.

¿Puedo llegar a tener dos soluciones maximales a $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ distintas?

Se vería así:



(AL FINAL ESTO QUE DIBUJÉ NO OCURRE CON HIPÓTESIS.)

Son iguales en $(-\alpha, \alpha)$ $\Rightarrow$ No rompe Picard en principio.

RESP: NO

→ Teo (0.3) Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con hipótesis de Picard y $(t_0, x_0) \in \Omega$ entonces $\exists!$ solución maximal a

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad //$$

Ejemplo: En definitiva, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \sin t$ es la única solución máximal a

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

$C^\infty \Rightarrow C^1 \Rightarrow$ Vale Picard y sus amigos.

3c) $\dot{x} = x^2 \cos t$ Hallar en función de (t_0, x_0) el intervalo de la solución maximal

- Una solución a $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$ es $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$

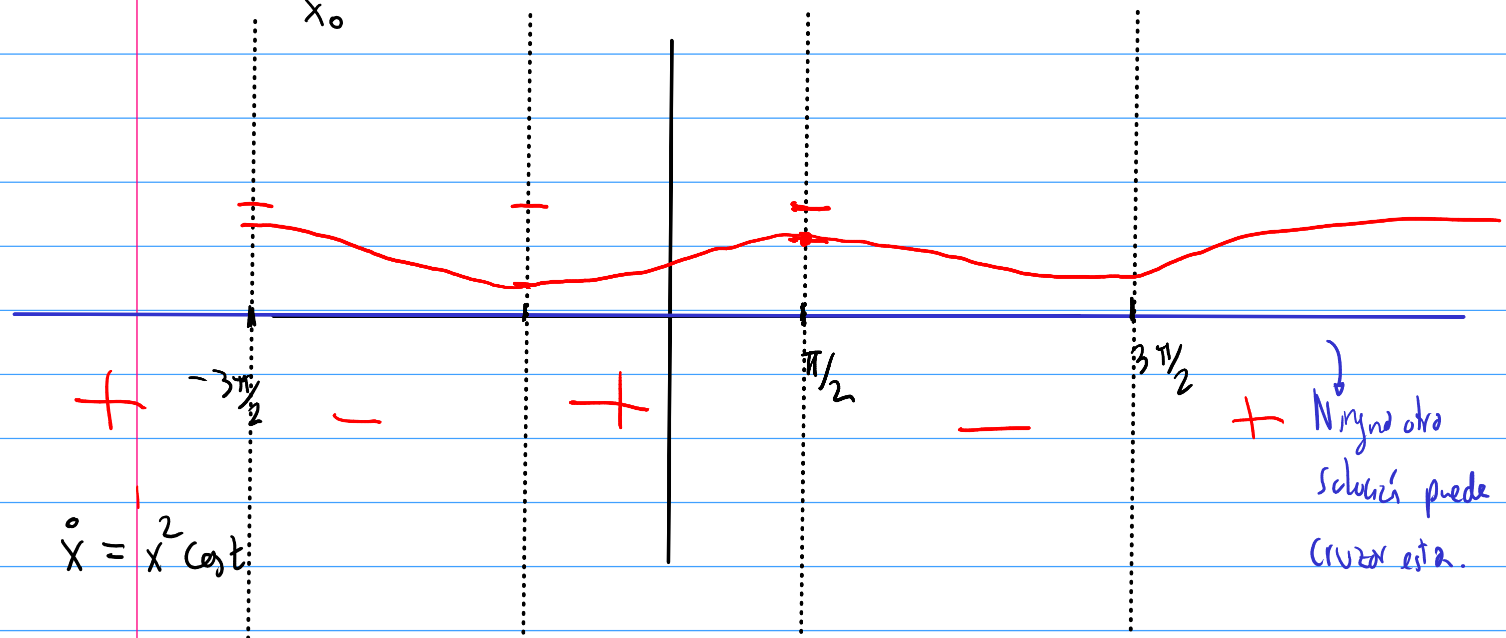
- Si $x_0 > 0$, variables separables $\dfrac{\dot{x}}{x^2} = \cos t \Rightarrow \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x} = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \operatorname{sen} t_0 - \operatorname{sen} t}$$

Caso: $\frac{1}{x_0} + \operatorname{sen} t_0 > 1 \Rightarrow$ La fórmula sirve en todo $\mathbb{R} \Rightarrow$

Si $\frac{1}{x_0} + \operatorname{sen} t_0 > 1 \Rightarrow$ La solución maximal es $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \operatorname{sen} t_0 - \operatorname{sen} t}.$$



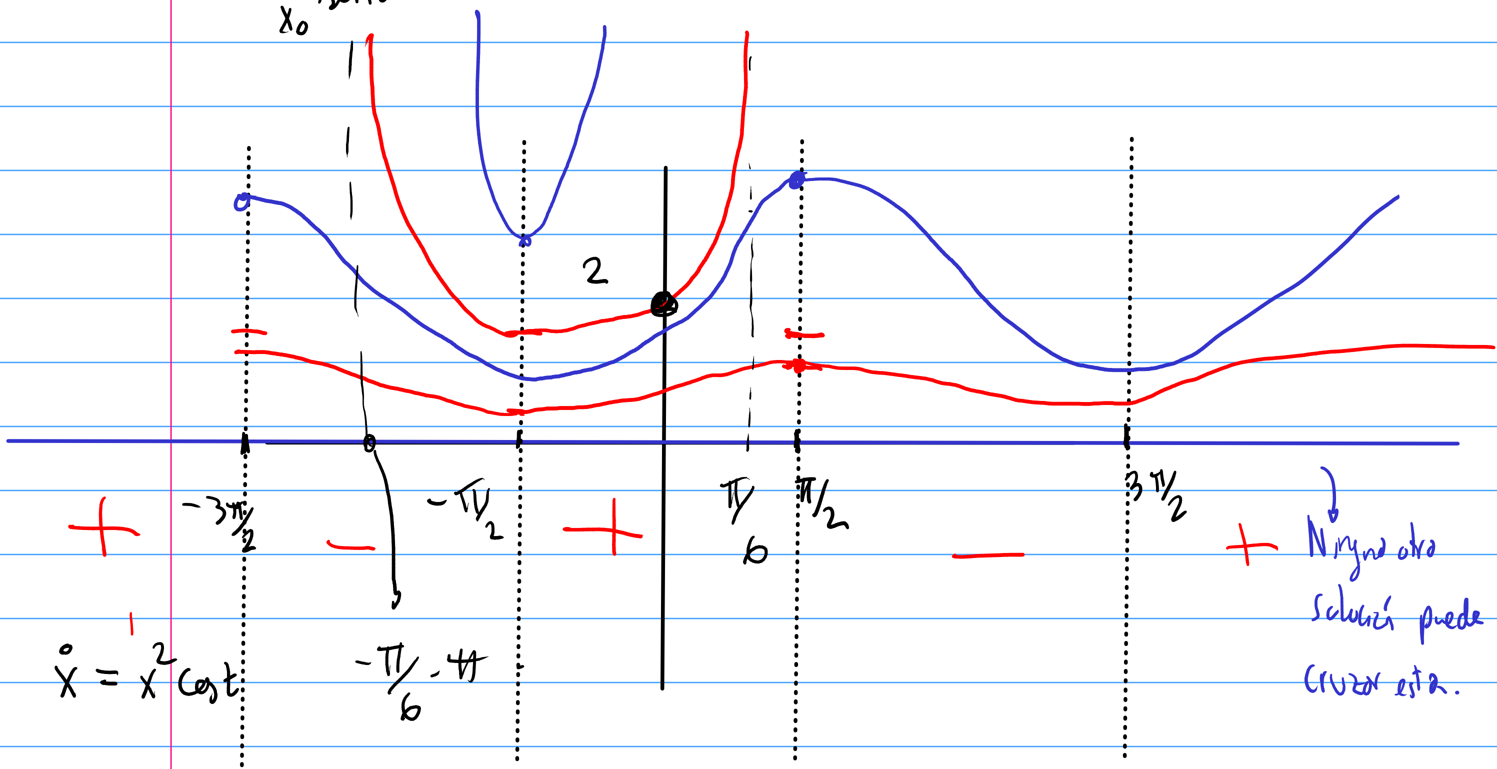
$\dot{x} = x^2 \cos t$

Signo$(\dot{x})$ = sign$(\cos t)$

Caso $\frac{1}{x_0}+\sin t_0 < 1 \Rightarrow \exists\; t_p < t_0 < t_f$, $\frac{1}{x_0}+\operatorname{sen} t_0-\operatorname{sen} t_p=0$ y $\frac{1}{x_0}+\operatorname{sen} t_0-\operatorname{sen} t_f=0$

$x_0>0$ $\Rightarrow$ La fórmula tiene sentido en (t_p, t_f)

$$x(t)=\frac{1}{\frac{1}{x_0}+\operatorname{sen} t_0-\operatorname{sen} t}\,, \quad (*)\; t_f = \arcsin\left(\operatorname{sen} t_0+1/x_0\right)+2k\pi$$



Signo$(\dot{x})$ = sign$(\cos t)$

Ejemplo, $t_0=0$, $x_0=2$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{1/2-\sin t}$

y el denominador se anula sii $\sin t = 1/2$ sii

$t=\pi/6+2k\pi$ o $t=-\pi/6-\pi+2k\pi$

$\Rightarrow$ $I=\left(-\frac{\pi}{6}-\pi,\ \pi/6\right)$ es el intervalo maximal.