Teorema (Cetaev)

Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

1). $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $U-\{\bar{x}\}$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \bar{x}$ y $V(x_n)\leq V(\bar{x})$

2). $\dot{V}(x)<0\quad\forall x\in U-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable.

Prop (*)

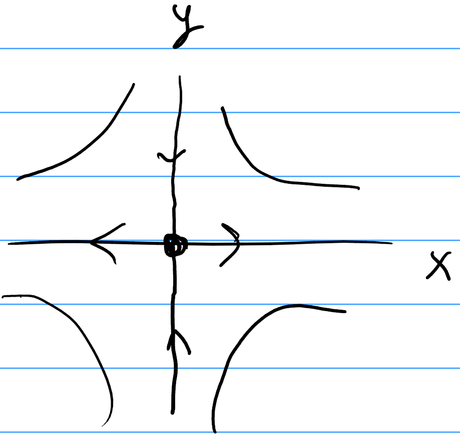
Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$ con $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial y $U\subset\Omega$ entorno de $\bar{x}$. Si existe $V:U\to\mathbb{R}$ función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en $\bar{x}$
- $\dot{V}>0\quad\forall x\in\Omega-\{\bar{x}\}$.

Entonces $\bar{x}$ es inestable

Ejemplo:

3b) $\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=x^2\\ \dot{y}=-y\end{array}\right] \simeq$



Estudiar estabilidad de $\bar{x}=(0,0)$.

Si quisiera usar Cetaev,

$V(x,y) = ax^2 + by^2$:

$$\dot{V} = 2a\,x\,x^2 + 2by(-y) = \underbrace{2ax^3}_{\text{MOLESTA, NO SIRVE}} - 2by^2$$

$V(x,y) = ax + by^2$

$\Rightarrow \dot{V}(x,y) = ax^2 + 2by(-y) = ax^2 - 2by^2$

Tomo $a<0$ y $b>0 \Rightarrow [\dot{V}(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)]$ 2) ✓

[Además $(0,0)$ no es un mínimo local estricto de V.] 1)

ya que $V(x,0) = ax$ presenta valores menores que 0 en todo entorno de $\bar{x} = (0,0)$.

Por Cetaev es inestable.

- $V(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

Sobre linealización:

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad f(x) = \overline{f(\bar{x}) + Jf(\bar{x})\cdot(x-\bar{x})} + e(x)$

$$\dot{x} = \underbrace{f(\bar{x})}_{0} + Jf(\bar{x})(x-\bar{x})$$

Es un sistema "lineal"

Teorema de Hartman-Großman

Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ función de clase C^1 y $\bar{x}$ un punto de equilibrio de $\dot{x}=f(x)$. Entonces .

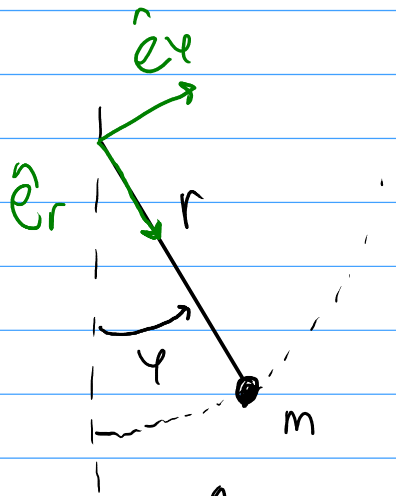
1) Si todas los valores propios de $Jf(\bar{x})$ tienen parte real negativa entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable

2) Si $Jf(\bar{x})$ tiene un valor propio positivo $\Rightarrow \bar{x}$ es inestable

En el 3b) $\begin{cases}\dot{x}=x^{2}\\ \dot{y}=-y\end{cases} \rightsquigarrow Jf_{(0,0)}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ no me sirve.

$$\dot{z}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}z \quad , \quad z=x-\bar{x}$$

7.



Péndulo simple

$\hat{e}_r=(\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi)$
$\hat{e}_\varphi=(-\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\varphi)$

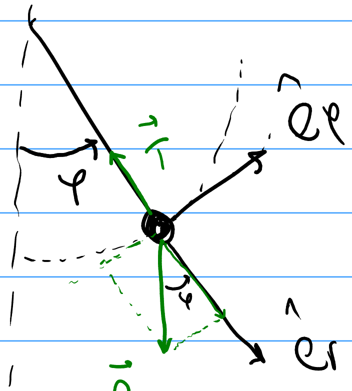
a) $\vec{r}(t)=r\hat{e}_r$

$\dot{\vec{r}}(t)=r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$

$\ddot{\vec{r}}(t)=r\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi+r\dot{\varphi}(\dot{\hat{e}}_\varphi)=r\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi-r\dot{\varphi}^2\hat{e}_r.$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{neta} \Rightarrow \underbrace{(m\ddot{\vec{r}})\cdot\hat{e}_\varphi}_{\cancel{m} r\ddot{\varphi}} = \vec{F}_{neta}\cdot\hat{e}_\varphi$$

$$\cancel{m} r\ddot{\varphi} = -\cancel{m} g \sin\varphi$$



$\vec{P} = -mg \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e}_\varphi + mg\cos\varphi\, \hat{e}_r$

$$\Rightarrow \quad r\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi$$

b) $k = \sqrt{\dfrac{g}{r}} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -k^2\sin\varphi$

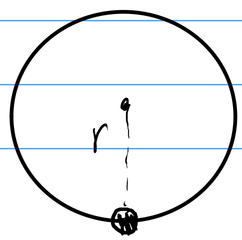
$$x = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = x \\ \dot{x} = \ddot{\varphi} = -k^2\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ -k^2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= f(x,\varphi)$$

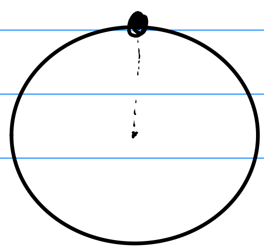
$$\theta = \dot{\varphi}/k \quad \Rightarrow \quad \dot{\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} k\theta \\ -k\sin\varphi \end{pmatrix}$$

c) Hallar punto de equilibrio: $k\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

$-k\sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$



$\theta = 0,\ \varphi = 0$



$\theta = 0,\ \varphi = \pi$

d) Linealizar alrededor de los puntos de equilibrio

$$f(\varphi,\theta) = (\underbrace{k\cdot\theta}, -k\sin\varphi)$$

$$Jf = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$Jf(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

Valores propios complejos $\Rightarrow$ No se.

$$Jf((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = \pm k$, tiene uno positivo

$\Rightarrow$ Inestable.

e) Demostrar que si $(\varphi(t), \theta(t))$ es una solución entonces

$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$ no varía en el tiempo.

$$\Leftrightarrow \dot{V} = 0 \quad , \quad \dot{V} = \theta\dot{\theta} + \operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi} = \theta(-k\sin\varphi) + \operatorname{sen}\varphi\,(k\theta)$$

$$= -k\theta\operatorname{sen}\varphi + k\theta\operatorname{sen}\varphi = 0$$

Se dice que V es una preintegral. Esto se interpreta viendo que V es la energía cinetica + potencial, entonces la energía se conserva.

f) Usando la parte anterior estudiar estabilidad.

* La función $V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi$ tiene un mínimo local estricto en los puntos $(\varphi,\theta) = (2k\pi, 0)$.

* Además: $\dot{V} = 0 \leq 0$

$\Rightarrow$ Por Lyapunov 1 los puntos son estables.

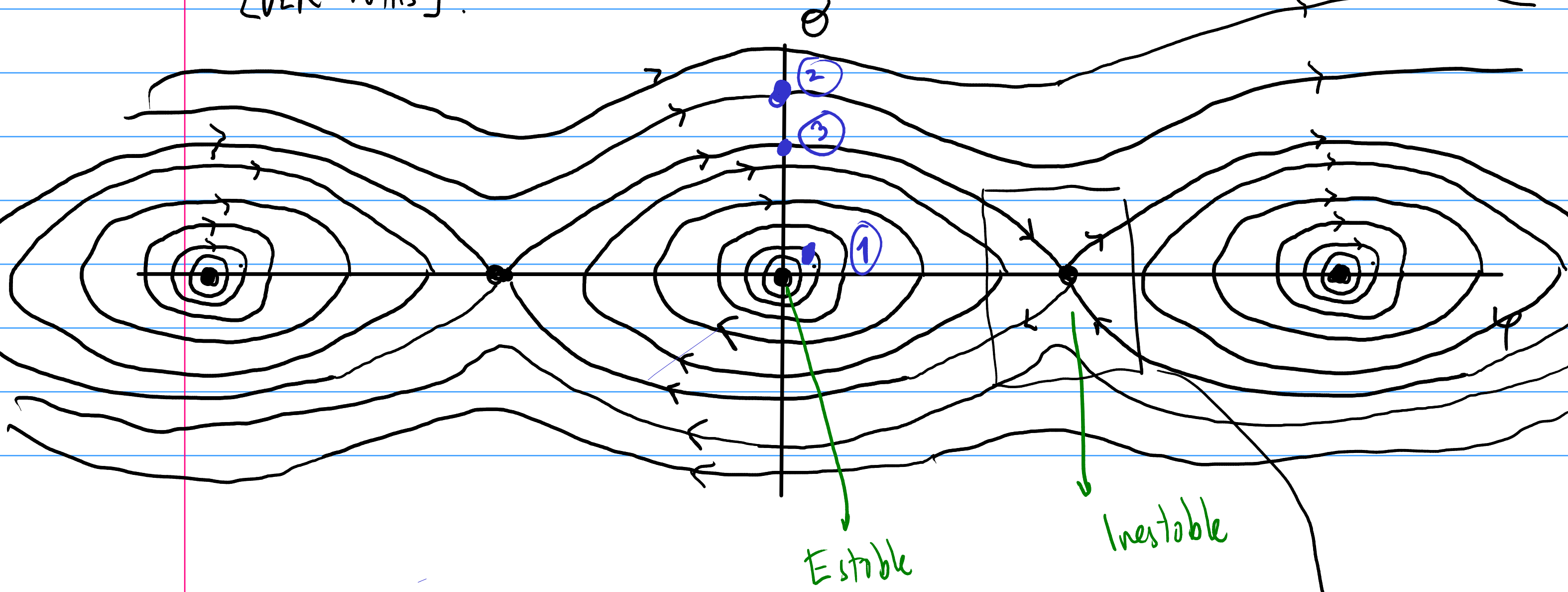
g) Esbozar un diagrama de fase de las soluciones.

Como $\dot{V} = 0$ si $(\varphi(t),\theta(t))$ es solución $\Rightarrow V(\varphi(t),\theta(t)) = cte.$

$\Rightarrow$ Las orbitas están contenidas en las curvas de nivel de V

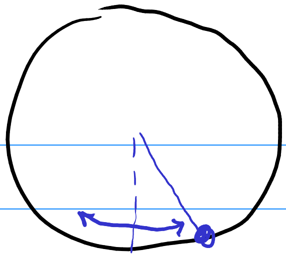
$\Rightarrow$ Si dibujo las curvas de nivel de V tengo el diagrama de fase

- HACER EL ESTUDIO DE $\frac{1}{2}\theta^2 - \cos\varphi = C$ para distintos valores de C [VER NOTAS].

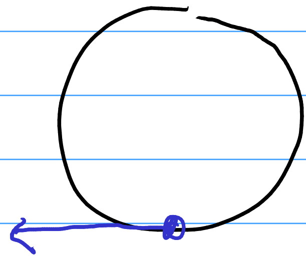


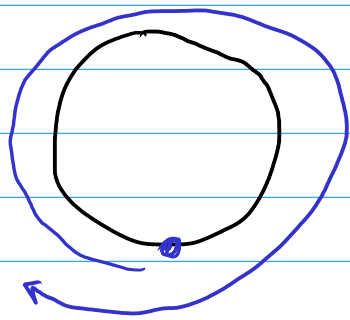
Se parece al sistema lineal $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1

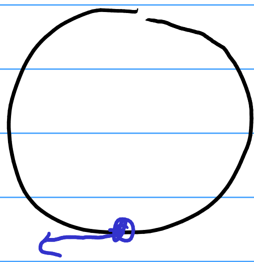


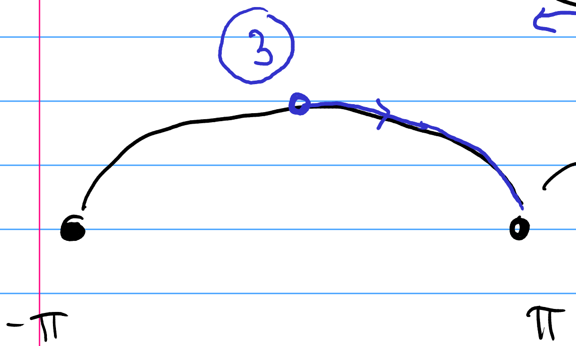
2 Esta dando vueltas





3 Arranco





Nunca llega !!

Demora ∞ tiempo en en llegar a π