Transformada de Laplace.

Vamos a considerar funciones $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua a trozos.

Def. Llamamos transformada de Laplace de la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a la función

$$\underbrace{\mathcal{L}[f]}_{\text{La función transformada}}(\underset{\text{Variable de la función}}{s}) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \quad , \quad s\in\mathbb{C} \quad , \text{ siempre que sea convergente}$$

$$\left[\begin{array}{l} F(t) = t + it^3 \\ \int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b t\,dt + i\int_a^b t^3\,dt \end{array}\right]$$

Ejemplo: $f(t)=1 \quad \forall t\geq 0$

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} 1e^{-st}\,dt = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}\,dt$$

$$\underset{s\neq 0}{=} \lim_{T\to+\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s} - \underbrace{\lim_{T\to+\infty}}\frac{e^{-sT}}{s} \overset{?}{=} \frac{1}{s} \quad \text{si } a>0$$

$s=a+ib$

$$\frac{e^{-(a+ib)T}}{s} = \frac{e^{-aT}}{s}\cdot e^{-ibT}$$

$e^{-aT}\to$ $+\infty$ Módulo 1

$\mathcal{L}[1](s) = 1/s$, dominio $= \{s\in\mathbb{C} \mid Re(s)>0\}$.

- Ejemplo: $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$, $\{s\in\mathbb{C} \mid Re(s)>a\}$.

$f(t)=e^{at}$

$a\in\mathbb{R}$

- Lineal: Si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, y f,g son dos funciones continuas a trozos

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g).$$

- Transformada de la derivada: Si f' es continua $\forall t\geq 0$ entonces

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\cdot\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

$\text{Sen}(wt) \longrightarrow \underbrace{A}_{\mathbb{C}}e^{iwt} \quad \Big| \quad (\underbrace{e^{iwt}}_{H})' = Aiw\cdot\underbrace{e^{iwt}} = \underbrace{Aiw}\,H$

[$x(t)$ es mi función]

Ejemplo: $\begin{cases} \dot{x} + x = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ | $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$

$\dot{x} + x = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(\dot{x} + x)(s) = 1/s$

$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\dot{x})(s)}_{s \cdot X(s) - \underbrace{x(0)}_{0}} + \underbrace{\mathcal{L}(x)(s)}_{X(s)} = 1/s \Rightarrow s X(s) + X(s) = 1/s$

$\Rightarrow X(s) \cdot (s+1) = 1/s \Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} \xrightarrow{?}$ ¿$x(t)$?

Entonces puedo resolver fácil quién es $X(s)$ la transformada de mi solución. ¿Puedo encontrar $x(t)$ a partir de su transformada?

Necesito "una inversa", ¿De qué mapa? $\mathcal{L}$: $\underbrace{\text{Funciones reales}}$ $\to$ Funciones complejas

En qué dominio

Teo: Sea f, g dos funciones continuas de $\underbrace{\text{orden exponencial}}$ y $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s) \Rightarrow f = g$.

$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ para algún M, α.

$f(t) = t^t$

$f(t) = e^{t^2}$

$s \neq 0, s \neq -1$

$X(s) = \dfrac{1}{s(s+1)} \overset{?}{=} \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}$

Recuerdo tapadita: 1) Multiplico por s: $\dfrac{1}{s+1} = A + \dfrac{sB}{s+1} \xrightarrow{\lim_{s \to 0}} \underline{1 = A}$

2) Multiplico por $s+1 \Rightarrow \dfrac{1}{s} = \dfrac{A(s+1)}{s} + B \overset{s \to -1}{\Longrightarrow} \underline{-1 = B}$

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = 1 - e^{-t}.$$

$x(t) = 1 - e^{-t}$. || Resolví la ecuación diferencial.

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \underbrace{H(s) \cdot F(s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad F(s) = \mathcal{L}(f)(s), \quad \dot{x} + x = \underbrace{f(t)}_{}^{1}, \quad x(0) = 0.$$

$$f(t) = \sin t \Rightarrow X(s) = \underbrace{H(s)}\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \Rightarrow A + C\cos(t) + D\operatorname{sen} t.$$

$$\dddot{x} + 5\ddot{x} + 9\dot{x} + 5x = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(\dot{x})(s) = s\mathcal{L}(x)(s) \overset{x(0)=0}{=} sX(s)$$

$$\mathcal{L}(\ddot{x})(s) = s^2 X(s), \quad \mathcal{L}(\dddot{x})(s) = s^3 X(s)$$

$$\Rightarrow s^3 X(s) + 5s^2 X(s) + 9sX(s) + 5X(s) = 1/s$$

$$X(s) \cdot (s^3 + 5s^2 + 9s + 5) = 1/s \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s\underbrace{(s^3+5s^2+9s+5)}_{\text{Raíz } -1}}$$

$$s^3 + 5s^2 + 9s + 5 = (s+1) \cdot (s^2 + 4s + 5)$$

$\downarrow$

Raíz: $-2 \pm i \cdot 1$

$$s^2 + 4s + 5 = (s+2)^2 + 1^2$$

$-2 + i$ $\quad e^{-2t}\cos(t)$

$e^{-2t}\operatorname{sen}(t)$

$$X(s) = \frac{1}{s((s+2)^2+1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+2)+C}{(s+2)^2+1} + \frac{D}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = A + D\cdot e^{-t} + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{B(s+2)}{(s+2)^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{(s+2)^2+1}\right)$$

$$= \underbrace{A}_{} + D\,e^{-t} + B\cos(t)e^{-2t} + C\sin(t)e^{-2t}.$$

$f(t) = 1\ \forall t$

↑ Forzado por f

//

— Aclaración: Por tablas $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$

$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$ ←

Propiedad de traslación en frecuencia: $\mathcal{L}(f(t)\cdot e^{at})(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-a)$

Ej: $\mathcal{L}(\cos t\cdot e^{-2t})(s) = \mathcal{L}(\cos t)(s+2) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$

$\mathcal{L}(\sin t\cdot e^{3t})(s) = \mathcal{L}(\sin t)(s-3) = \frac{1}{(s-3)^2+1}.$

---

16. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Se sabe que $y(x) = \boxed{C_1e^x + C_2e^{-x} + g(x)}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = -\cos x$ para todos los valores de C_1 y C_2 reales. Hallar $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

$y(x) = g(x) \Rightarrow g'' + ag' + bg = -\cos(x)$ Solución homogénea

↓ $C_1 = C_2 = 0$

$y(x) = e^x + g(x)$, $\quad y_1(x) = e^x + g(x)$ $\Rightarrow \boxed{y_1 - y_2(x)} = e^x$

$C_1 = 1, C_2 = 0$ $\quad y_2(x) = g(x)$

$y_1'' + ay_1' + by_1$

e^{1x} sol homogénea $\Rightarrow 1$ raíz de $- (y_2'' + ay_2' + by_2) =$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$ $\quad -\cos x - (-\cos x) = 0$